

4

Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με εμβαδόν 150 m^2 . Αν το μήκος του είναι 5 m μεγαλύτερο από το πλάτος του, να βρείτε πόσα μέτρα συρματοπλέγμα χρειάζονται για την περίφραξή του.

Μικροπείραμα



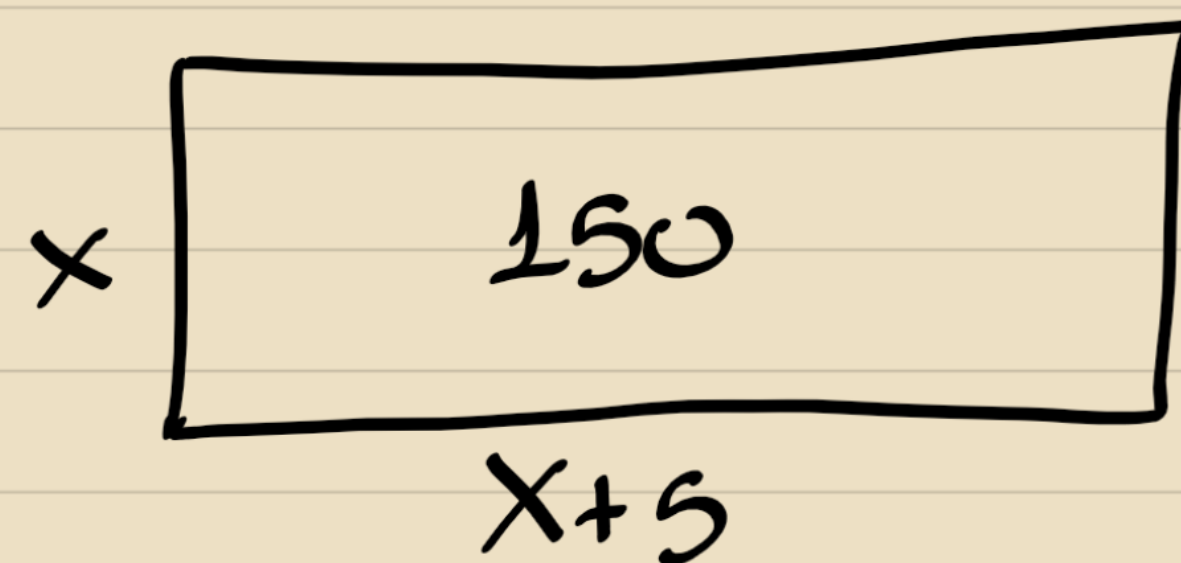
5

Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς ακραίους, που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 74.

Μικροπείραμα



4) θεωρώ x το πλάτος



Γίνεται να

$$x \cdot (x+5) = 150$$

$$x^2 + 5x - 150 = 0$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 5 \\ c &= -150 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 1 \cdot (-150) \\ &= 25 + 600 = 625 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm 25}{2} = \begin{matrix} 10 & \text{δεύτερη} \\ -15 & \text{απαρρ.} \end{matrix}$$

Αντιπρόσθεση είναι

$$2 \cdot 10 + 2 \cdot 15 = 20 + 30 = 50$$

4

Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με εμβαδόν 150 m^2 . Αν το μήκος του είναι 5 m μεγαλύτερο από το πλάτος του, να βρείτε πόσα μέτρα συρματοπλέγμα χρειάζονται για την περίφραξή του.

Μικροπείραμα



3 way
Πρώτος περιττός x
Διάδοχος: $x+2$

5

Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς ακεραίους, που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 74.

Μικροπείραμα



a way

Πρώτος περιττός: $2x+1$
Διάδοχος περιττός: $2x+3$

$$\begin{aligned} (2x+1)^2 + (2x+3)^2 &= 74 \\ 4x^2 + 4x + 1 + 4x^2 + 12x + 9 &= 74 \\ 8x^2 + 16x - 64 &= 0 \\ 8(x^2 + 2x - 8) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ a &= 1 \\ b &= 2 \\ c &= -8 \\ \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4 + 32 = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \\ &= \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases} \end{aligned}$$

αφαι $1^{\text{ος}}$ περιττός
 $2 \cdot 2 + 1 = \textcircled{5}$

2^{ος}
 $2 \cdot 2 + 3 = \textcircled{7}$

ή

αφαι $1^{\text{ος}}$ περιττός
 $2 \cdot (-4) + 1 = \textcircled{-7}$
2^{ος}
 $2 \cdot (-4) + 3 = \textcircled{-5}$

8

Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 4 cm, 6 cm και 8 cm. Αν κάθε πλευρά του ήταν μεγαλύτερη κατά x cm, τότε το τρίγωνο θα ήταν ορθογώνιο. Να βρείτε τον αριθμό x .

Έχω αν ο $\pi.\theta.$ $\alpha\epsilon$

$$(8+x)^2 = (6+x)^2 + (4+x)^2$$

$$64 + 16x + \cancel{x^2} = 36 + 12x + \cancel{x^2} + 16 + 8x + x^2$$

$$64 + 16x - 36 - 12x - 16 - 8x - x^2 = 0$$

$$-x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$\begin{aligned} a &= -1 \\ b &= -4 \\ \gamma &= 12 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6

Ο καθηγητής των Μαθηματικών πρότεινε στους μαθητές του να λύσουν ορισμένες ασκήσεις για να εμπεδώσουν την ενότητα που διδάχτηκαν. Όταν αυτοί τον ρώτησαν σε ποια σελίδα είναι γραμμένες οι ασκήσεις, αυτός απάντησε: «Αν ανοίξετε το βιβλίο σας, το γινόμενο των αριθμών των δύο αντικριστών σελίδων μέσα στις οποίες είναι γραμμένες οι ασκήσεις, είναι 506». Μπορείτε να βρείτε σε ποιες σελίδες είναι γραμμένες οι ασκήσεις;

Έστω x η μια σελίδα

η άλλη $x+1$

αρα οι σελίδες
είναι 22 και 23

αρα

$$x(x+1) = 506$$

$$x^2 + x - 506 = 0$$

$$a=1$$

$$b=1$$

$$c=-506$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 506 = 2025$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 45}{2} = \begin{matrix} 22 \\ -23 \end{matrix} \text{ απερ.}$$

11 Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυκλικό συντριβάνι και γύρω από αυτό να στρώσουμε με βότσαλα ένα κυκλικό δακτύλιο πλάτους 3 m. Αν ο δακτύλιος πρέπει να έχει εμβαδόν τριπλάσιο από το εμβαδόν που καλύπτει το συντριβάνι, να βρείτε την ακτίνα του συντριβανιού.

Μικροπείραμα

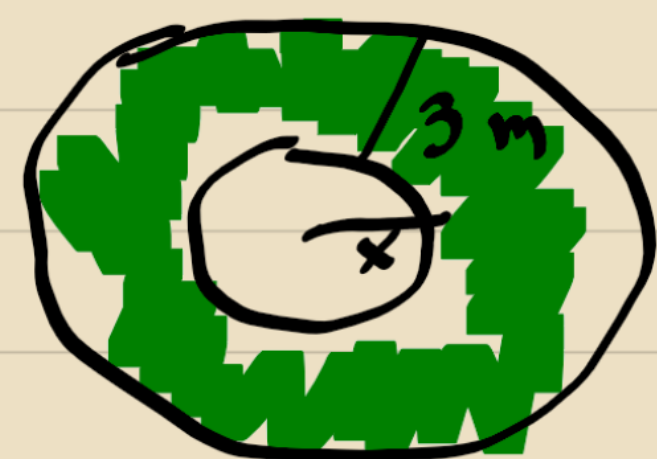


$$\cancel{x^2} + 6x + 9 - \cancel{x^2} = 3x^2$$

$$-3x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$3(-x^2 + 2x + 3) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2(-3)} = \frac{2 \pm 4}{-6}$$



x : ακτίνα συντριβανιού

$$E_{\text{συντρ}} = \pi \cdot x^2$$

$$E_{\text{δακτ}} = \pi \cdot (x+3)^2$$

$$E_{\text{δακτ}} = \pi(x+3)^2 - \pi \cdot x^2$$

Τριπλ. επι

$$\pi(x+3)^2 - \pi x^2 = 3 \cdot \pi x^2$$

$$\frac{\pi(x+3)^2 - \pi x^2}{\pi} = \frac{3\pi x^2}{\pi}$$

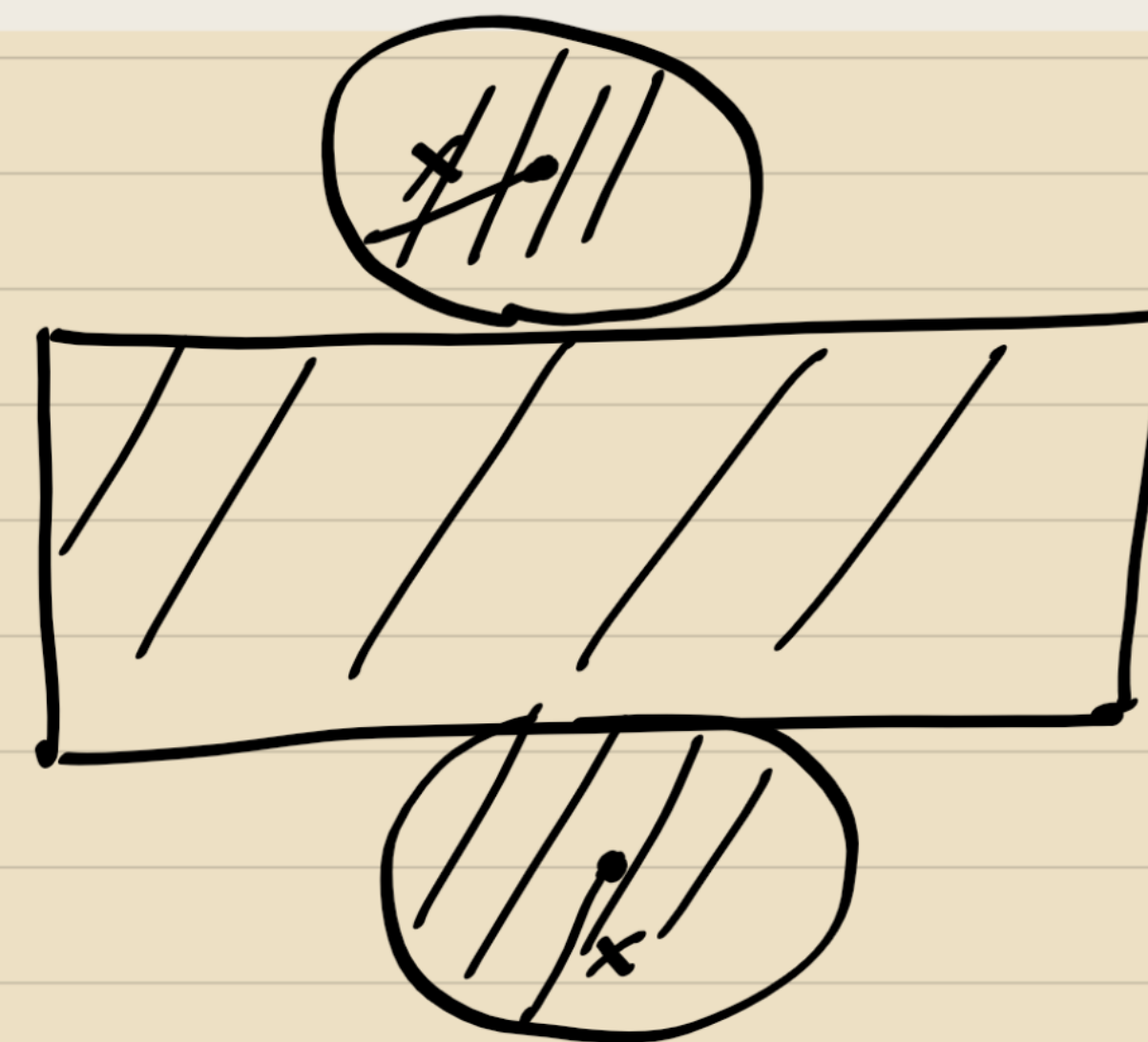
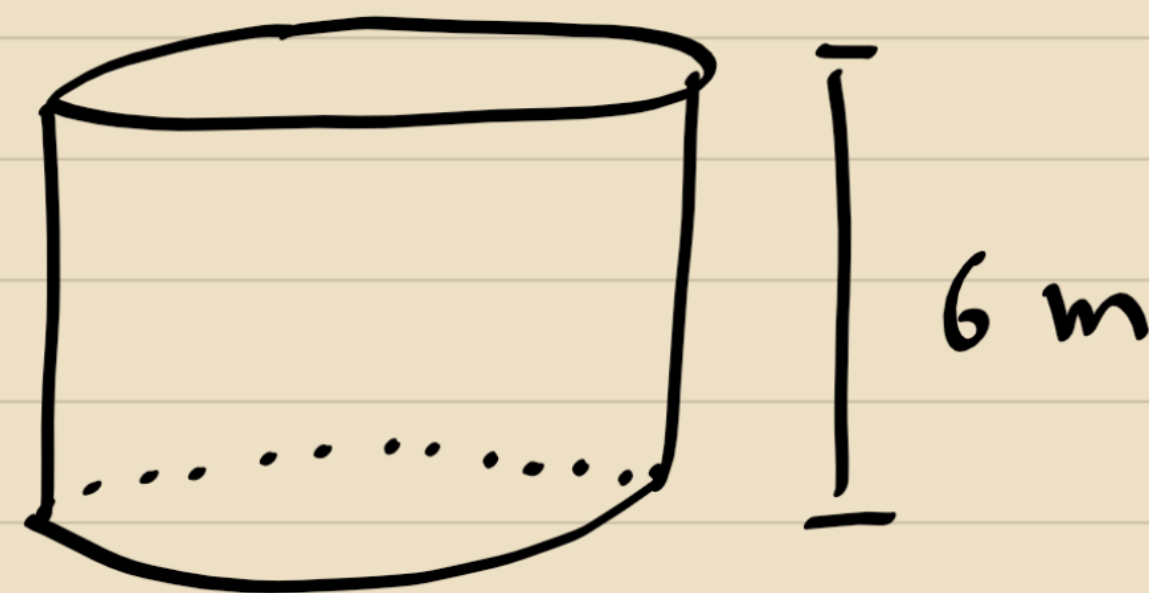
$$\cancel{\pi} [(x+3)^2 - x^2] = 3x^2$$

$$(x+3)^2 - x^2 = 3x^2$$

12

Για την κατασκευή μιας κλειστής κυλινδρικής δεξαμενής καυσίμων ύψους 6 m, χρειάστηκαν 251,2 m² λαμαρίνας. Να υπολογίσετε την ακτίνα της βάσης της δεξαμενής.

Έστω x η ακτίνα



$$Ε_{\text{πλευρ}} + 2Ε_{\text{κύκλ}} = 251,2 \text{ m}^2$$

$$Ε_{\text{κύκλ}} = \pi x^2$$

$$Ε_{\text{πλευρ}} = \theta, \nu = 2\pi x \cdot 6 = 12\pi x$$

μεν $12\pi x + 2 \cdot \pi x^2 = 251,2$

$$12 \cdot 3,14 x + 2 \cdot 3,14 x^2 = 251,2$$

⋮

§ Ανισότητες / ανισότητες

$$a > b$$

$$a \geq b$$

$$a < b$$

$$a \leq b$$

Θα έχουμε $a > b$ όταν $a - b > 0$
 Θα έχουμε $a < b$ όταν $a - b < 0$

n.x

$$5 > 3$$

$$8 < 10$$

αφού

$$5 - 3 = 2 > 0$$

αφού

$$8 - 10 = -2 < 0$$

Εξίσωση

$$x + 3 = 5$$

Ισότητα

$$x + 3 = x + 3$$

Ανίσωση

$$x + 3 > 2$$

Ανισότητα

$$x^2 \geq 0$$

Ιδιότητες ισότητας

1) Αν έχω $a=b$ τότε $a+y=b+y$
 Μπορώ να προσέχω & στα 2 μέν
 την ιδιότητα του ίδιου αριθμού

n.x
 $5=5$
 $5+2=5+2$

2) Αν έχω $a=b$ τότε $a-y=b-y$

Μπορώ να αφαιρώ & στα 2 μέν
 την ιδιότητα του ίδιου αριθμού

n.x
 $12=12$
 $12-4=12-4$

Ιδιότητες ανισότητας

1) Αν έχω $a < b$ τότε $a+y < b+y$
 Μπορώ να προσέχω & στα 2 μέν
 την ανισότητα του ίδιου αριθμού

n.x
 $5 > 3$
 $5+2 > 3+2$

2) Αν έχω $a < b$ τότε $a-y < b-y$

Μπορώ να αφαιρώ & στα 2 μέν
 την ανισότητα του ίδιου αριθμού

n.x
 $5 < 9$
 $5-12 < 9-12$

3) $\forall a=b$ τότε $a \cdot x = b \cdot x$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε & στα 2 μέλη
με το ίδιο ποσό
(τη συνδετική)

n.x

$$5 = 5$$
$$3 \cdot 5 = 3 \cdot 5$$

3) $\forall a < b$ τότε:

• αν $x > 0$ τότε $a \cdot x < b \cdot x$

• αν $x < 0$ τότε $a \cdot x > b \cdot x$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε & στα 2 μέλη
μες αν πολλαπλασιάσουμε τον ίδιο ποσό με
έναν αρνητικό αλλάζει η φορά.

n.x

$$5 > 3$$

$$5 > 3$$

$$5 \cdot 5 > 3 \cdot 5$$

$$25 > 15$$

$$5 > 3$$

$$5 \cdot (-3) < 3 \cdot (-3)$$

$$-15 < -9$$

4) Αν $a = b$ τότε $a : \gamma = b : \gamma$

Μπορούμε να διαλέξουμε & στα 2 μέτρα
για να έχουμε τον ίδιο αριθμό
(την ένδειξη)

π.χ $12 = 12$

$$\frac{12}{2} = \frac{12}{2}$$

$$6 = 6$$

4)  Αν $a < b$ τότε:

• αν $\gamma > 0$ τότε $a : \gamma < b : \gamma$

• αν $\gamma < 0$ τότε $a : \gamma > b : \gamma$

Μπορούμε να διαλέξουμε & στα 2 μέτρα
για να έχουμε τον ίδιο αριθμό, με
έναν αρνητικό αριθμό (την ένδειξη)

π.χ

$$26 > 14$$

$$26 : 2 > 14 : 2$$

$$13 > 7$$

$$26 : (-2) < 14 : (-2)$$

$$-13 < -7$$

5) Αν έχω μια κερντα
 υψηλή σε ίδια δύναμη και
 τα δύο βέλη και δεν
 αλλάξει τίποτα.

π.χ $3 = 3$

$3^2 = 3^2$ $3^3 = 3^3$

$9 = 9$ $27 = 27$

5) Αν $a < b$ τότε:

- 1) αν v είναι πέμπτος τότε $a^v < b^v$
- 2) αν v είναι άρτιος τότε:
 - αν $a, b > 0$ τότε $a^v < b^v$
 - αν $a, b < 0$ τότε $a^v > b^v$

αν δεν ξέρω δεν ψάχνω.

π.χ

$3 > 2$	$-3 < 2$	$3 > -2$	$-3 < -2$
---------	----------	----------	-----------

• $3^2 > 2^2$ $(-3)^2 > 2^2$ $(3)^2 > (-2)^2$ $(-3)^2 > (-2)^2$

$9 > 4$ $9 > 4$ $9 > 4$ $9 > 4$

• $3^3 > 2^3$ $(-3)^3 < 2^3$ $3^3 > (-2)^3$ $(-3)^3 < (-2)^3$

$27 > 8$ $-27 < 8$ $27 > -8$ $-27 < -8$

$$6) \text{ Αν } a=b \text{ τότε } \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$$

$$a, b \neq 0$$

Σε ένα κείμενο μπορεί να αντιστρέψω το $\frac{1}{a}$ και δεν αλλάζει τιμή.

$$6) \text{ Αν } a < b \text{ και } a, b \text{ αόγετοι}$$

$$\text{τότε } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Σε ένα κείμενο (παρα να αντιστρέψω το $\frac{1}{a}$ και αλλάξει η τιμή του κλάσματος).

π.χ

$$6 > 4$$

$$-6 < -4$$

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{6} > -\frac{1}{4}$$

nx

Av κxυς σu

$$2 < x < 7$$

Βπς ου φ'αυζα

ω

$$-3x + 6$$

Min

Εxω

σu

$$2 < x < 7$$

$$\xRightarrow{\cdot (-3)}$$

$$-3 \cdot 2 > -3 \cdot x > -3 \cdot 7$$

$$-6 > -3x > -21 \xRightarrow{+6}$$

$$-6 + 6 > -3x + 6 > -21 + 6$$

$$0 > -3x + 6 > -15$$

n.x Αν έχει οι $-5 < x < -1$
Ποι να φέρει να $2x^2 - 3$

Λύν

Έχει οι

$$-5 < x < -1$$

$$(-5)^2 > x^2 > (-1)^2$$

$$25 > x^2 > 1 \quad \Rightarrow \quad (: 2)$$

$$2 \cdot 25 > 2x^2 > 2 \cdot 1$$

$$50 > 2x^2 > 2 \quad \Rightarrow \quad -3$$

$$50 - 3 > 2x^2 - 3 > 2 - 3$$

$$47 > 2x^2 - 3 > -1$$

1 Αν ισχύει $3(\alpha - \beta) > 2(\alpha + \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha > 5\beta$.

2 Ποιες ιδιότητες της διάταξης πρέπει να εφαρμόσουμε στην ανισότητα $x > -6$ για να αποδείξουμε τις παρακάτω ανισότητες;

α) $-5x - 30 < 0$ 1) $3(\alpha - \beta) > 2(\alpha + \beta)$ 2) α)

β) $3x + 18 > 0$ $3\alpha - 3\beta > 2\alpha + 2\beta$

γ) $2(x + 4) > -4$ $3\alpha - 2\alpha > 2\beta + 3\beta$

$$\alpha > 5\beta$$

δ) $x > -6 \xRightarrow{+4}$

$$x + 4 > -6 + 4 \Rightarrow$$

$$x + 4 > -2 \xRightarrow{+2}$$

$$2 \cdot (x + 4) > -4$$

ε) $-2x - 6 < 6$

$$x > -6 \xRightarrow{+2}$$

$$-2x < 12 \xRightarrow{-6}$$

$$-2x - 6 < 6$$

β)

$$x > -6 \xRightarrow{\cdot (-5)}$$

$$3x > -6 \cdot 3$$

$$3x > -18 \xRightarrow{+18}$$

$$3x + 18 > -18 + 18 \Rightarrow$$

$$3x + 18 > 0$$

$$x > -6 \xRightarrow{\cdot (-5)}$$

$$-5x < -6 \cdot (-5)$$

$$-5x < 30 \xRightarrow{-30}$$

$$-5x - 30 < 30 - 30$$

$$-5x - 30 < 0$$

3 Αν $2 < \alpha < 6$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι αριθμοί

α) $\alpha - 2$

β) $2\alpha - 5$

γ) $1 - 3\alpha$

δ) $-3\alpha - 6$

4 Αν $\alpha < \beta$, τότε να αποδείξετε ότι

α) $5\alpha - 3 < 5\beta - 3$ β) $-2\alpha + 4 > -2\beta + 4$ γ) $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2}$ δ) $\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$

3) α) $2 < \alpha < 6 \xRightarrow{-2}$

$$2-2 < \alpha-2 < 6-2$$

$$0 < \alpha-2 < 4$$

β) $2 < \alpha < 6 \xRightarrow{\cdot(2)}$

$$4 < 2\alpha < 12 \xRightarrow{-5}$$

$$4-5 < 2\alpha-5 < 12-5$$

$$-1 < 2\alpha-5 < 7$$

γ) $2 < \alpha < 6 \xRightarrow{\cdot(-3)}$

$$-6 > -3\alpha > -18 \xRightarrow{+1}$$

$$-5 > 1-3\alpha > -17$$

3 Αν $2 < \alpha < 6$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι αριθμοί

α) $\alpha - 2$

β) $2\alpha - 5$

γ) $1 - 3\alpha$

4 Αν $\alpha < \beta$, τότε να αποδείξετε ότι

α) $5\alpha - 3 < 5\beta - 3$ β) $-2\alpha + 4 > -2\beta + 4$ γ) $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2}$ δ) $\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$

$$\begin{aligned} \text{α)} \quad 5\alpha - 3 &< 5\beta - 3 \xRightarrow{+3} \\ 5\alpha - \cancel{3} + \cancel{3} &< 5\beta - \cancel{3} + \cancel{3} \\ 5\alpha &< 5\beta \xRightarrow{:5} \\ \frac{5\alpha}{5} &< \frac{5\beta}{5} \Rightarrow \alpha < \beta \\ &\text{που ισχύει} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{β)} \quad -2\alpha + 4 &> -2\beta + 4 \xRightarrow{-4} \\ -2\alpha + \cancel{4} - \cancel{4} &> -2\beta + \cancel{4} - \cancel{4} \Rightarrow \\ -2\alpha &> -2\beta \xRightarrow{(-2)} \\ \frac{-2\alpha}{-2} &< \frac{-2\beta}{-2} \\ \alpha &< \beta \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

5 Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$, να αποδείξετε ότι:

α) $3 < x + y < 8$

β) $4 < 2x + y < 11$

γ) $-4 < x - y < 1$

δ) $2x + 3y$

ε) $3x - 2y$

α)

$$1 < x < 3$$

$$\begin{array}{r} (+) \quad 2 < y < 5 \\ \hline \end{array}$$

$$3 < x + y < 8$$

β) $1 < x < 3 \xRightarrow{(\cdot 2)} 2 < 2x < 6$

$$\begin{array}{r} (+) \quad 2 < y < 5 \\ \hline \end{array}$$

$$4 < 2x + y < 11$$

Παρατήρηση: Μπορούμε να

προσθέτουμε 2 ανισότητες μεταξύ τους.

Μπορούμε να αφαιρέσουμε ανισότητες μεταξύ τους.

γ) $2 < y < 5 \xRightarrow{(-1)} -2 > -y > -5 \Rightarrow$

$$-5 < -y < -2$$

$$\begin{array}{r} (+) \quad 1 < x < 3 \\ \hline \end{array}$$

$$-4 < x - y < 1$$

$$1 < x < 3$$

$$3x - 2y$$

$$2 < y < 5$$

$$\cdot \quad 1 < x < 3 \xRightarrow{(\cdot 3)} 3 < 3x < 9$$

$$2 < y < 5 \xRightarrow{(-2)} -4 > -2y > -10 \Rightarrow -10 < -2y < -4$$

$$\begin{array}{r} (+) \quad 3 < 3x < 9 \\ \hline -7 < 3x - 2y < 5 \end{array}$$

6

Αν $x > 2$ και $y > 3$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $xy > 6$

β) $(x - 2)(y - 3) > 0$

γ) $(x + 2)y > 12$

$$\begin{array}{l} \text{α)} \quad x > 2 \\ \quad \quad y > 3 \\ \hline x \cdot y > 6 \end{array}$$

β)

Παρατήρηση: Μπορούμε να
 πολλαπλασιάσουμε
 τις δύο
 τεύχνη
 τότε όταν
 είναι όλα
 θετικά.

2
 ανισότητες
 μπορούμε να
 διαπείσω
 ανισότητες
 με τεύχνη.

ΔΕΝ