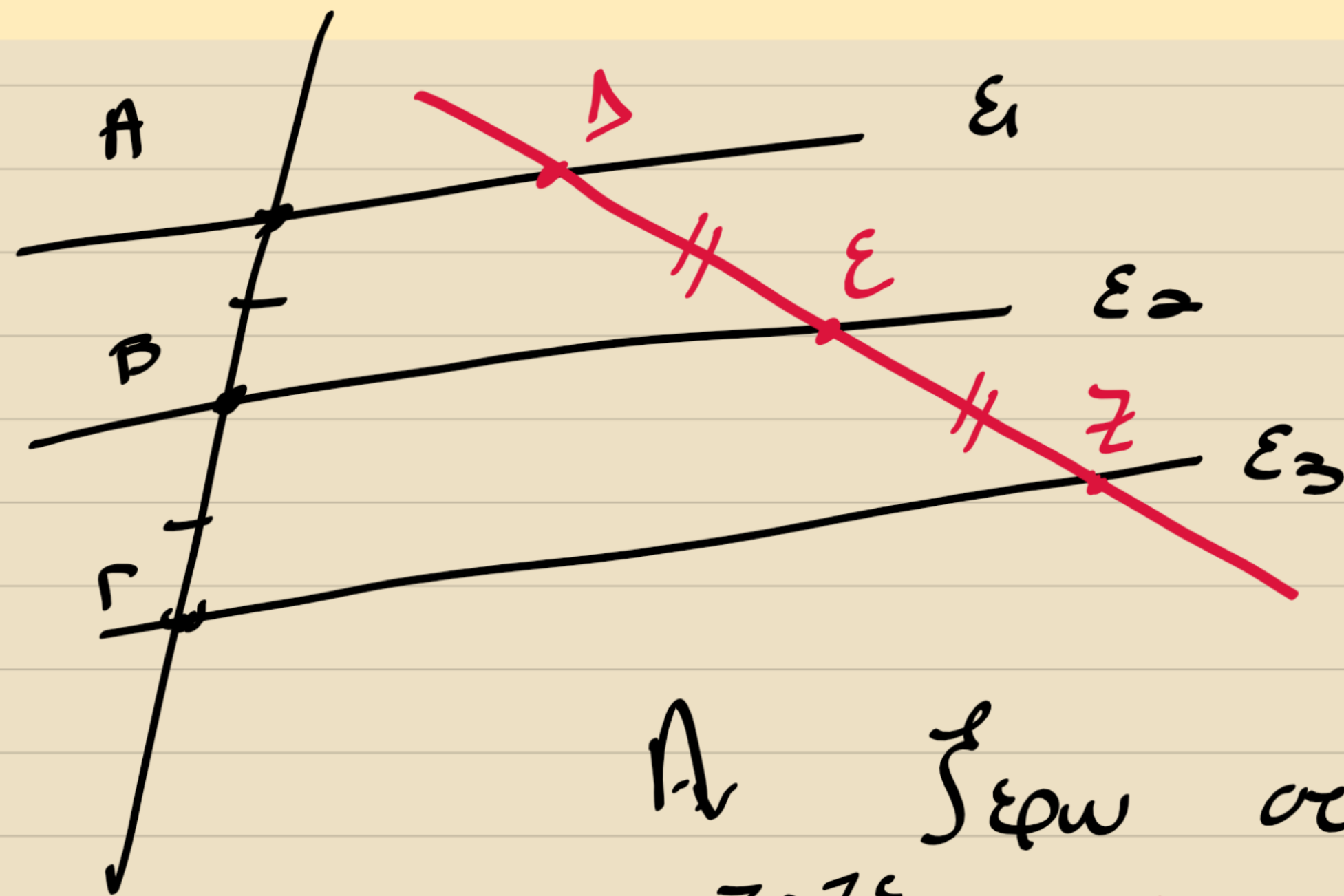


§ Λογική εωθ. ζητήσεων

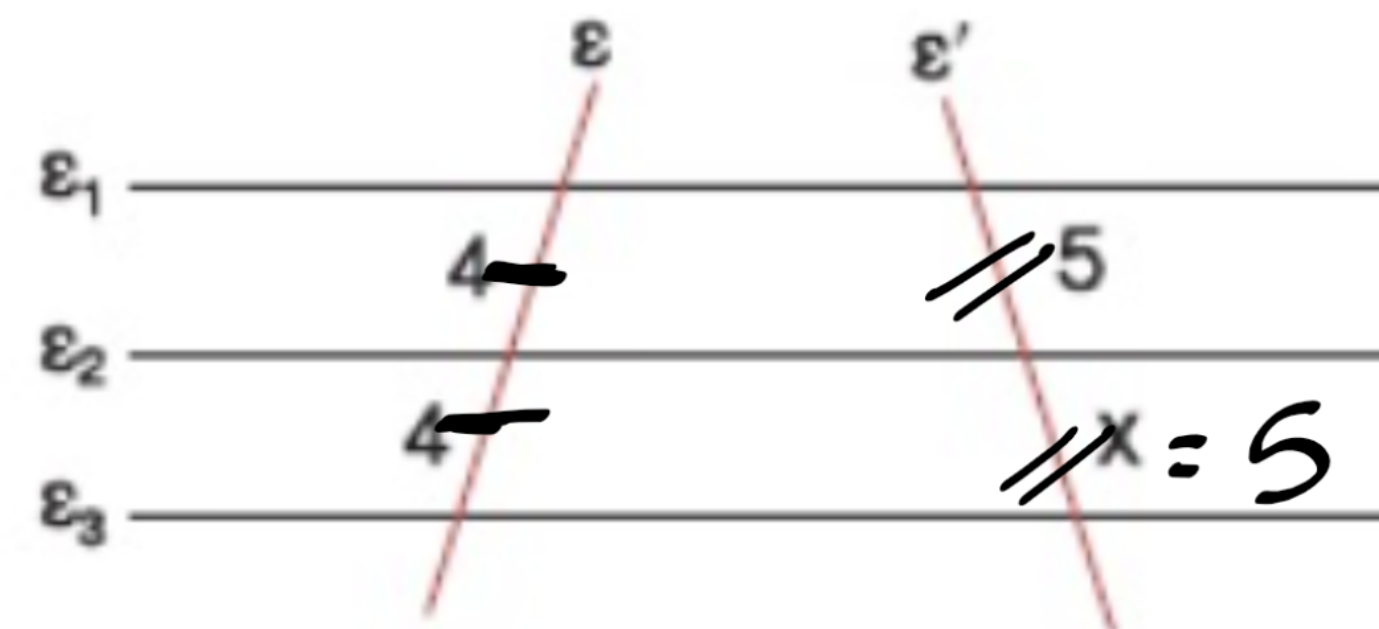
Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.



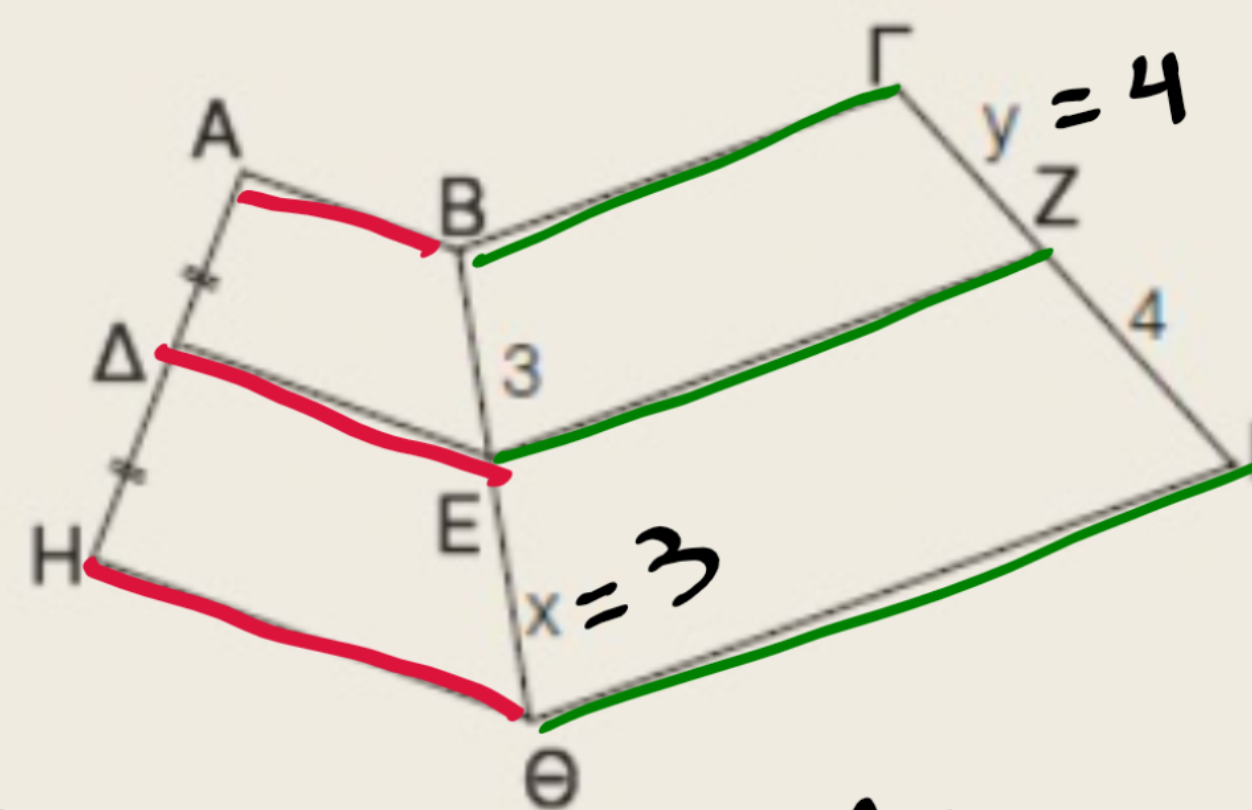
$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$$

Αν $\xi_{\text{εωθ. σε}}$ $AB = B\Gamma$
 $\omega \tau \varepsilon$ $\Delta \varepsilon = \varepsilon \zeta$

1 Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$. Να υπολογίσετε το x .



1 Στο διπλανό σχήμα είναι $AB \parallel \Delta E \parallel H\Theta$ και $B\Gamma \parallel EZ \parallel \Theta I$. Αν $A\Delta = \Delta H$, να υπολογίσετε το x και το y .

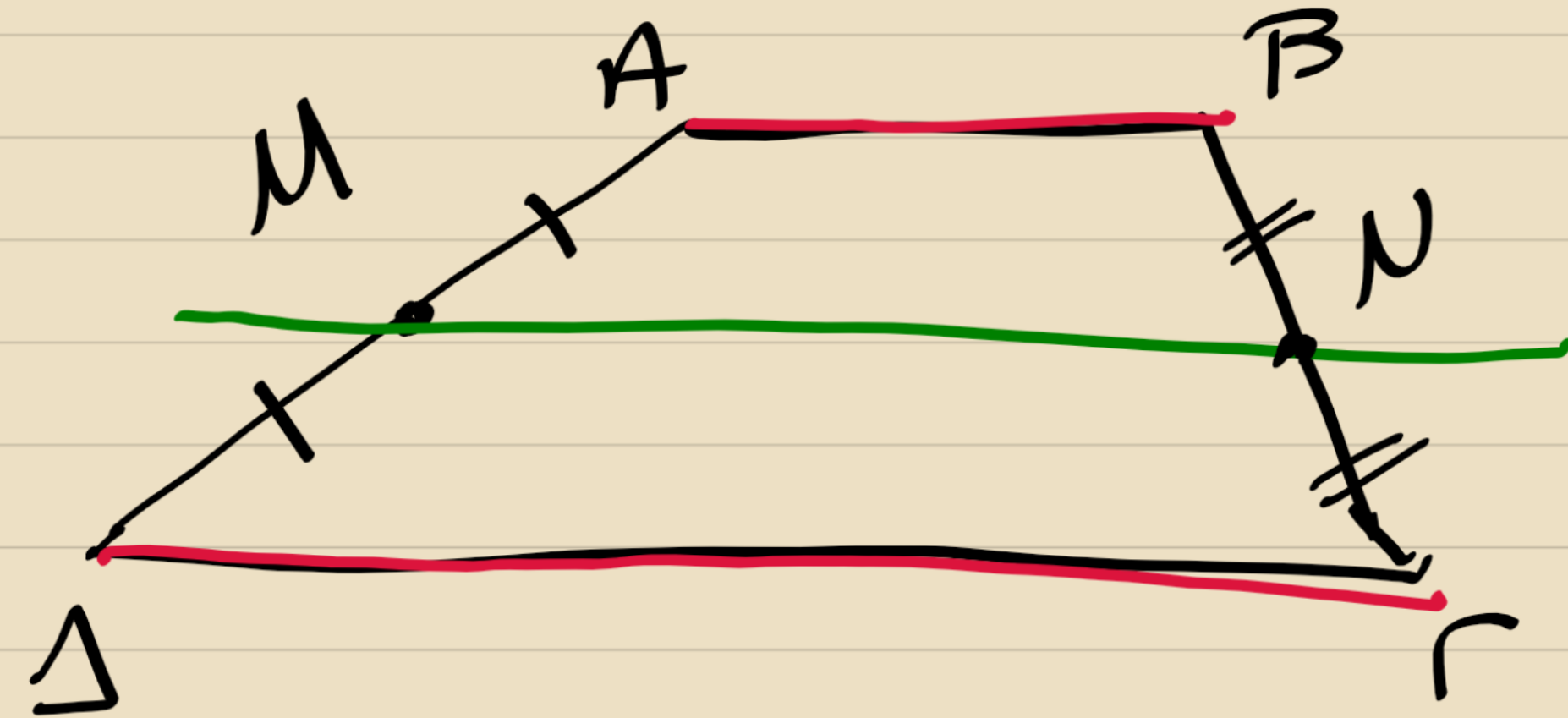


Αφω $AB \parallel \Delta E \parallel H\Theta$ και $A\Delta = \Delta H$ εκω $BE = E\Theta$

Ομοια αφω $B\Gamma \parallel EZ \parallel \Theta I$ εκω $\Gamma Z = ZI$.

Παρατήρηση

Έστω ένα τεταγμένο $AB\Gamma\Delta$ και M το



τέρο της AD . Αν φέρω

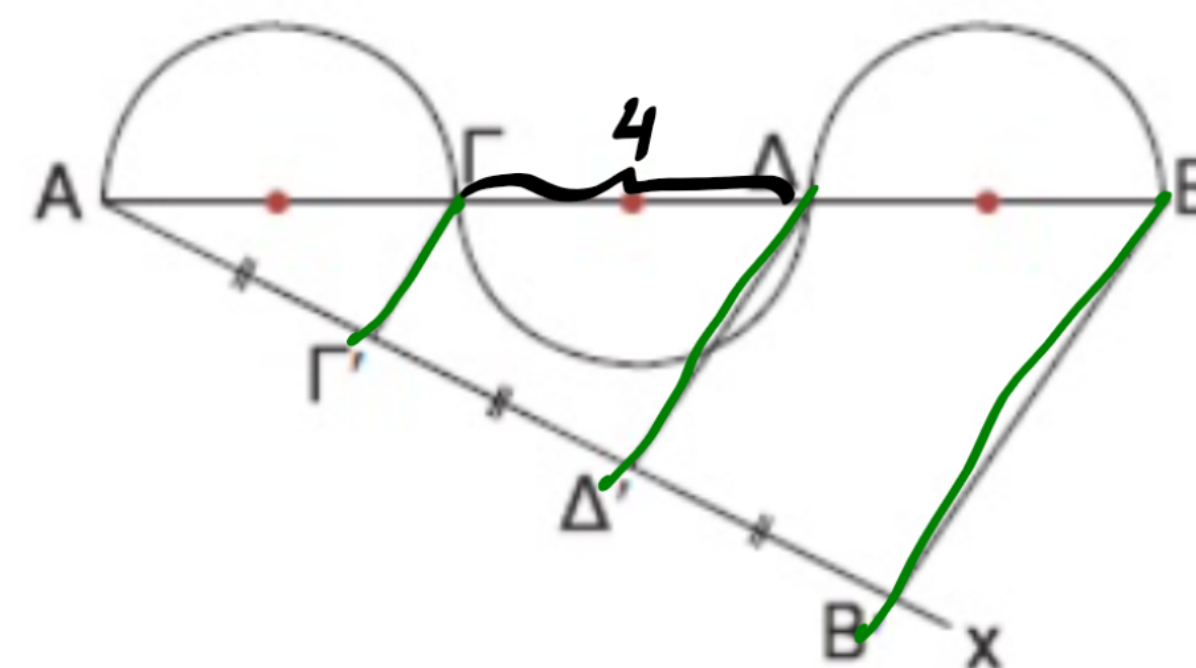
από το M παράλληλη στα

AB και $\Delta\Gamma$ φέρω οίγωφα
ού θα δείχνεται από το

τέρο της $B\Gamma$ (N)

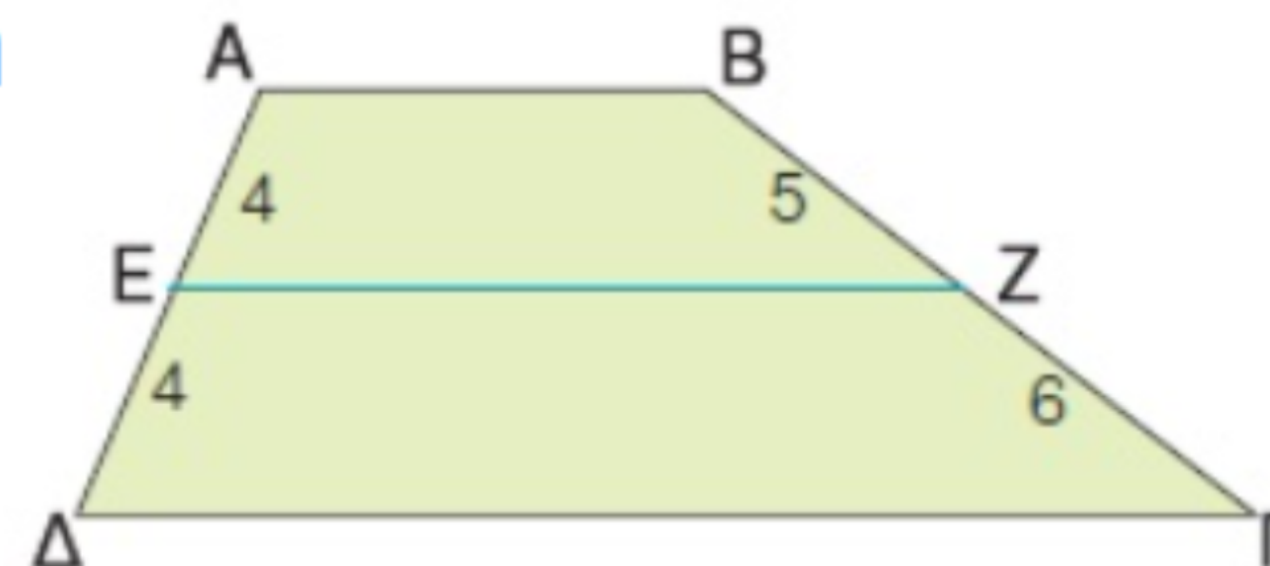
- 2 Αν $B'B \parallel \Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$ και η διάμετρος $\Gamma\Delta$ του δεύτερου ημικυκλίου είναι 4 cm, τότε να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB .

αφω $B'B \parallel \Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$ και
 $Ar' = r'\Delta' = \Delta'B'$ ισχυα ου
 $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B = 4$ ωα $AB = 12$ cm



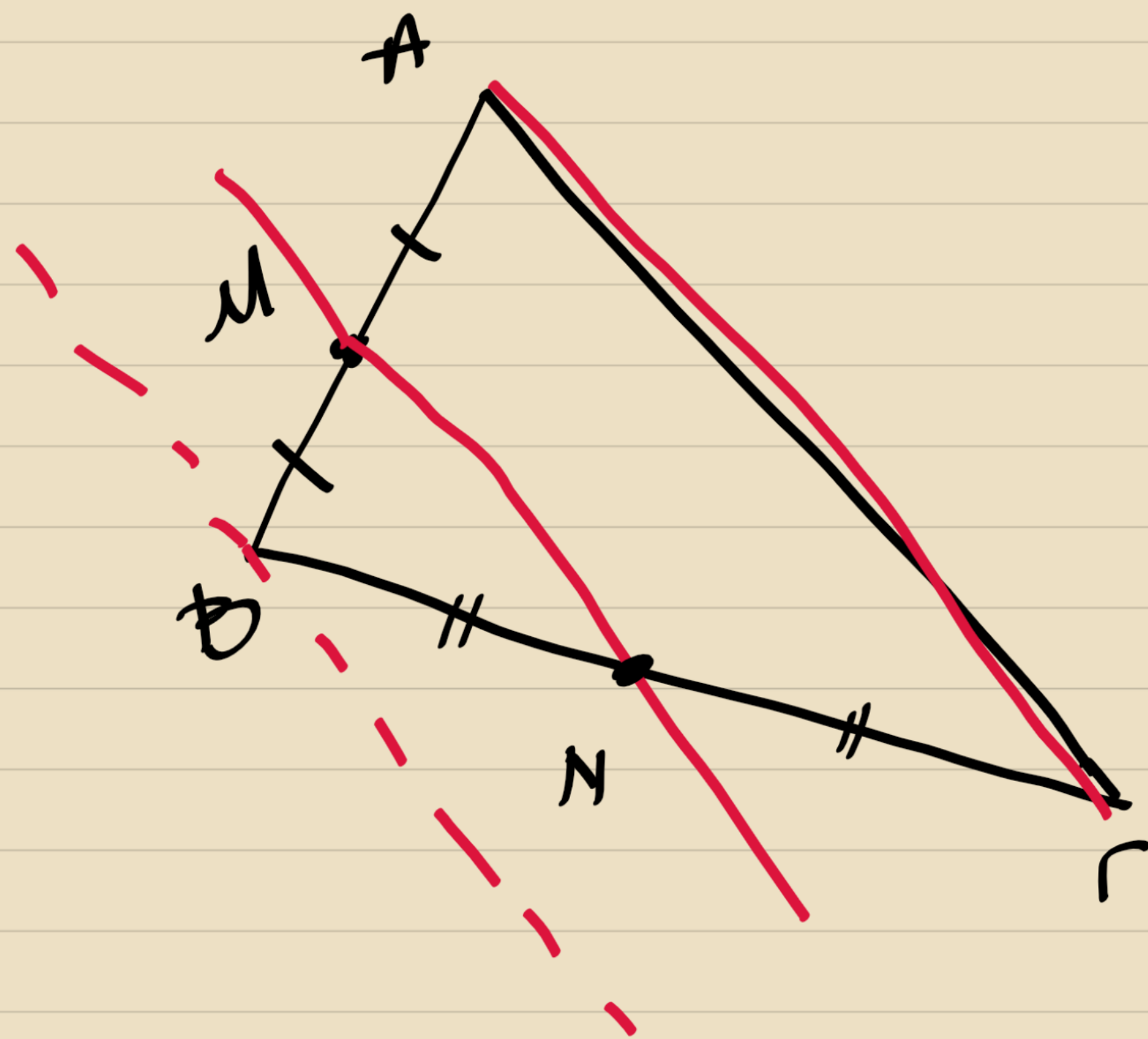
- 3 Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι η EZ παράλληλη προς τις βάσεις του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

οχι γιαυ θα ηηρενε $BZ = Z\Gamma$



Παρατήρηση

Έστω τρίγωνο $\triangle ABC$



και M το μέσο της πλευράς AB

αν αν'ω M έξω παρα'όλην

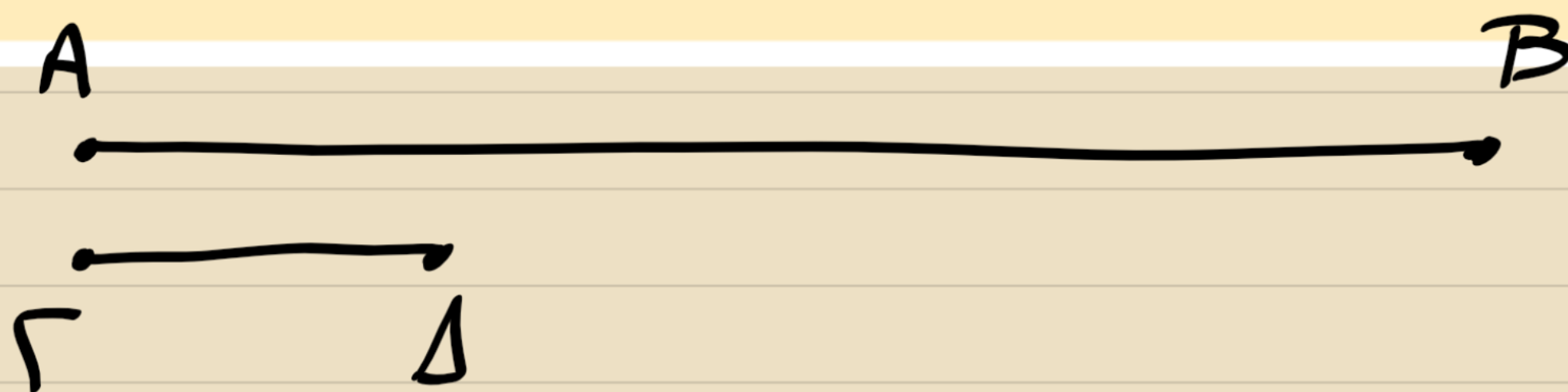
της της AC τότε είναι εἰς

ου διαμέτρου του μέσου

BC (N)

► Λόγος εω. 2 ημείων

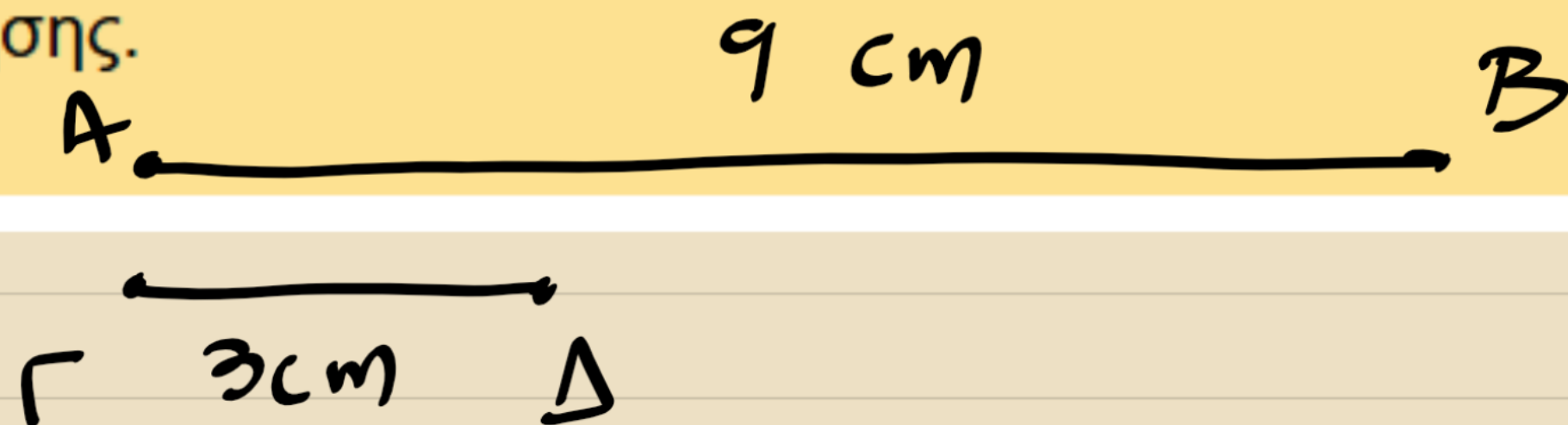
Ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ προς το ευθύγραμμο τμήμα AB συμβολίζεται $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ και είναι ο αριθμός λ , για τον οποίο ισχύει $\Gamma\Delta = \lambda \cdot AB$.



τότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = 3$ αφού $AB = 3 \cdot \Gamma\Delta$ με $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{1}{3}$

Γενικά

Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.



$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{9 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = 3$$

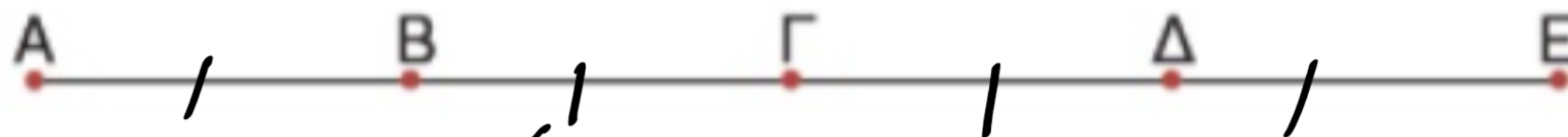
4 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$\alpha) \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad \beta) \frac{B\Gamma}{AB} = \frac{12}{4} = 3$$



$$\gamma) \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad \delta) \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

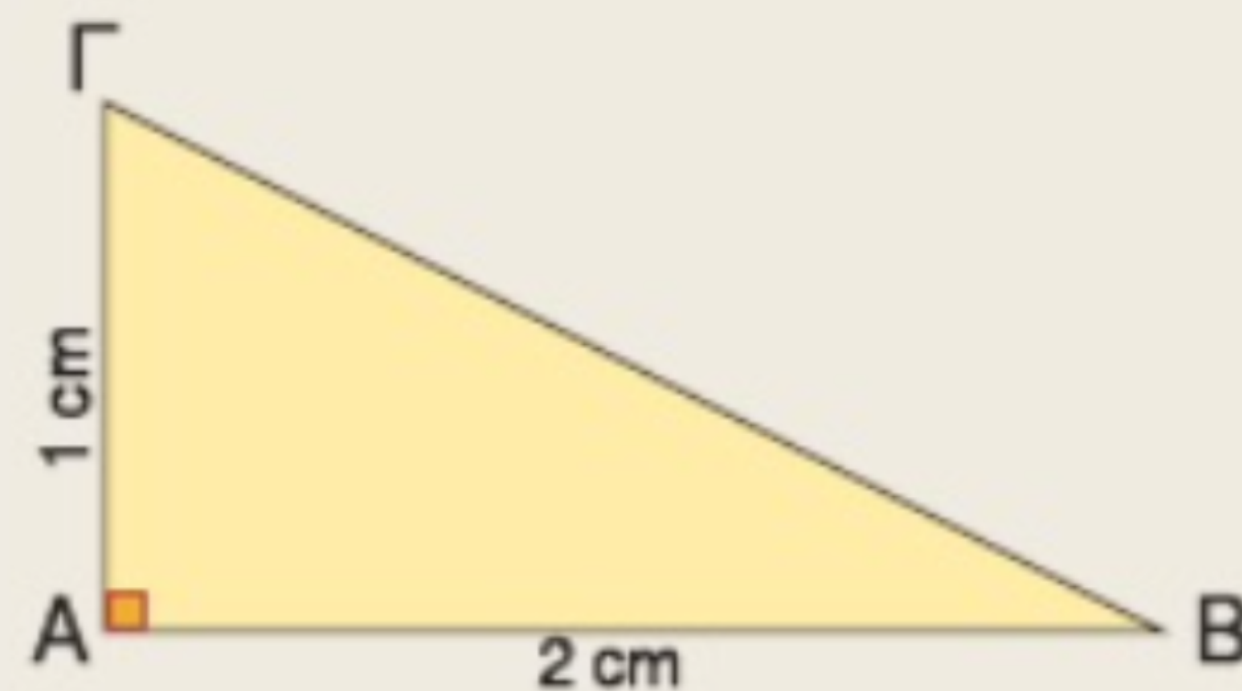
5 Αν $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E$ να συμπληρώσετε τις ισότητες:



$$\alpha) \frac{AB}{A\Delta} = \frac{AB}{3AB} = \frac{1}{3} \quad \beta) \frac{B\Delta}{BE} = \frac{2AB}{3AB} = \frac{2}{3} \quad \gamma) \frac{A\Gamma}{AE} = \frac{2AB}{4AB} = \frac{1}{2} \quad \delta) \frac{AE}{B\Gamma} = \frac{4AB}{AB} = 4 \quad \epsilon) \frac{A\Gamma}{\Gamma E} = \frac{2AB}{2AB} = 1$$

3 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος να βρείτε τους λόγους:

α) $\frac{AB}{A\Gamma}$ β) $\frac{B\Gamma}{AB}$ γ) $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$



4 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $AB = 6 \text{ cm}$ και $B\Gamma = 10 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\frac{AB}{B\Gamma}$ β) $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ γ) $\frac{AB}{A\Gamma}$

3) α) $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{2}{1} = 2$

β)

► Αναλογίες

Γενικά

Τα ευθύγραμμα τμήματα α , γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β , δ , όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

π.χ

Τα ευθύγρ. τμήματα α , β είναι αντιστοιχώς επίθετα
4 και 5 αν ισχύει ότι $\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{5}$

Ιδιότητες

1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ (χιαστί)

2) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$ (πίεζε χιαστί)

3) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ (πίεζε χιαστί)

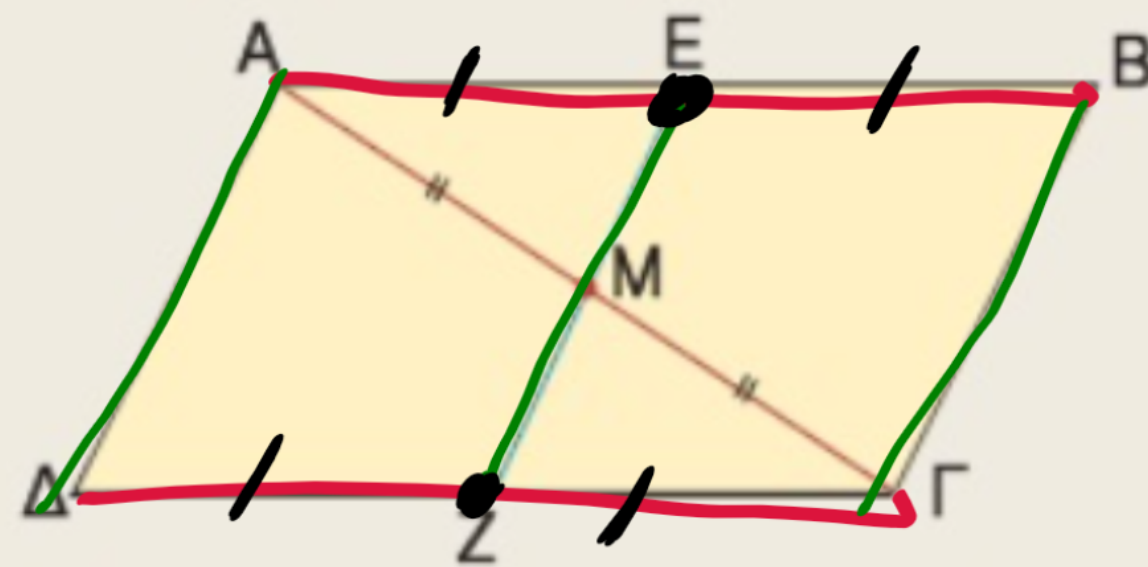
$$4) A_v \quad \frac{a}{b} = \frac{\delta}{\delta} \quad \text{z.z.} \quad \frac{a}{b} = \frac{\delta}{\delta} = \frac{a+\delta}{b+\delta}$$

$$\underline{\underline{n.x}} \quad \frac{1}{2} = \frac{4}{8} \quad \frac{1+4}{2+8} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

6

Από το μέσο M της διαγωνίου $ΑΓ$ ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$, να φέρετε $ΕΖ \parallel ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι: α) Τα σημεία $Ε, Ζ$ είναι μέσα των πλευρών $ΑΒ, ΔΓ$ αντιστοίχως.

β) Τα τμήματα $ΑΒ, ΑΓ$ είναι ανάλογα προς τα τμήματα $ΑΕ, ΑΜ$.



α) Από το μέσο M της διαγωνίου $ΑΓ$ ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$, να φέρετε $ΕΖ \parallel ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι: α) Τα σημεία $Ε, Ζ$ είναι μέσα των πλευρών $ΑΒ, ΔΓ$ αντιστοίχως. β) Τα τμήματα $ΑΒ, ΑΓ$ είναι ανάλογα προς τα τμήματα $ΑΕ, ΑΜ$.

β) Θεωρούμε να σχετίσουμε ότι $\frac{AB}{AE} = \frac{AG}{AM}$

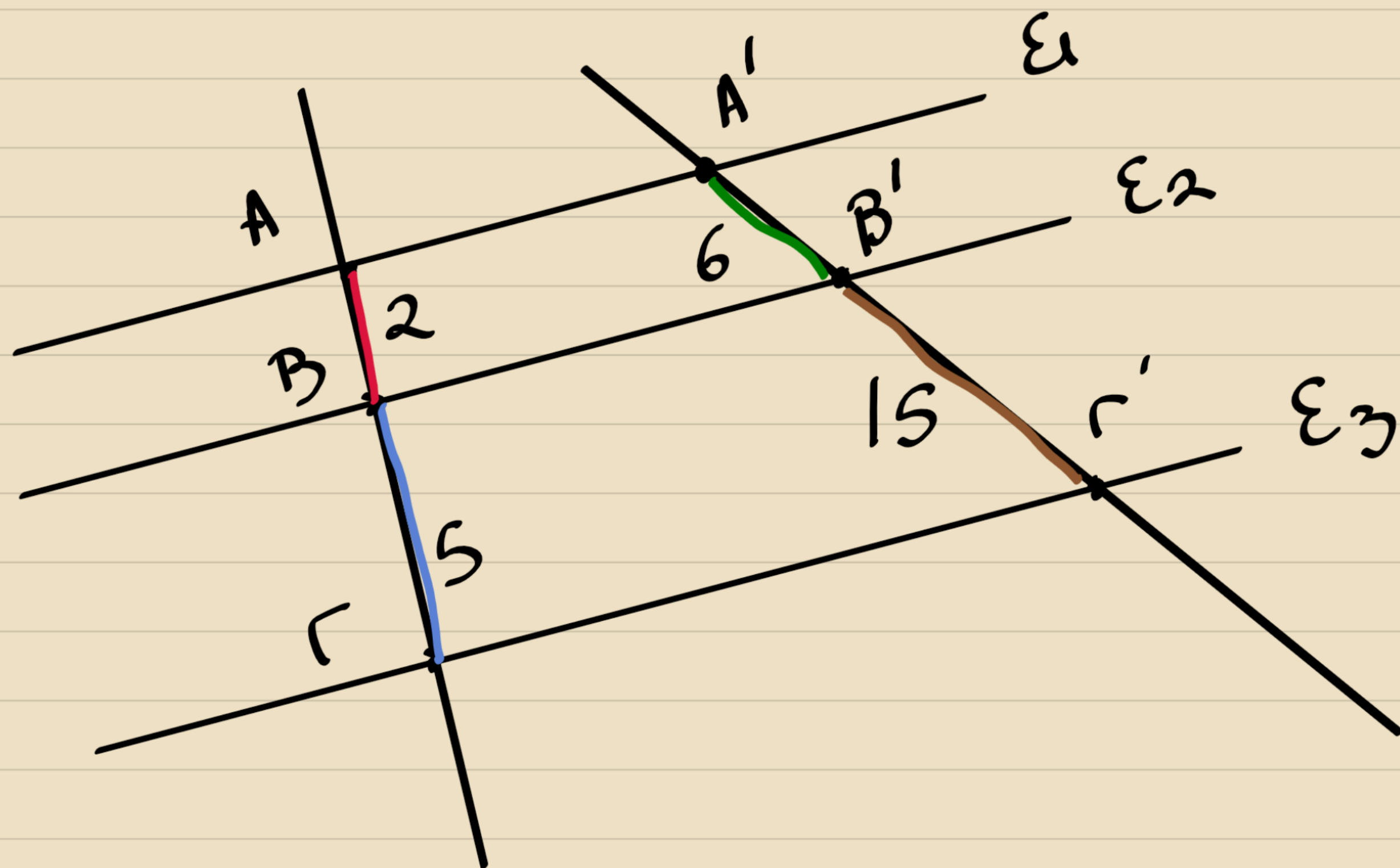
$\frac{AB}{AE} = 2$ και $\frac{AG}{AM} = 2$ αφού $Ε$ και $Μ$ είναι μέση των $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα.

Θεωρήματα Θαλή

Γενικά

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:

$$\text{αν } \varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 \text{ τότε } \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$



$$\frac{2}{6} = \frac{5}{15} = \frac{7}{21}$$

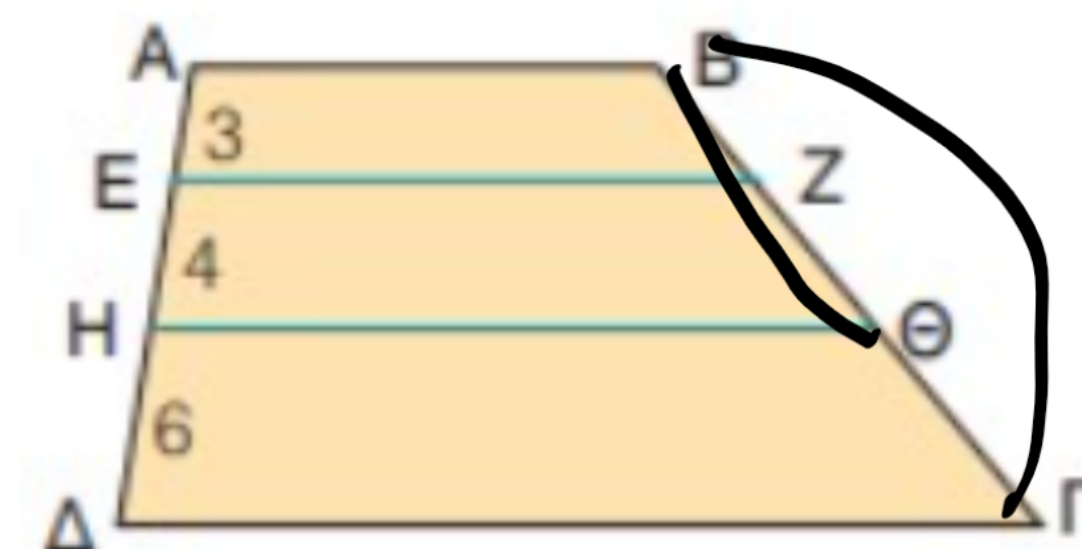
Συμπέρασμα:

Έχουμε επίσης ότι

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} \text{ και } \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A'B'}{A'\Gamma'}$$

1 Αν AB, EZ, ΗΘ, ΔΓ είναι παράλληλες, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$\alpha) \frac{BZ}{\Theta\Gamma} = \frac{AE}{\Delta\Gamma} = \frac{3}{6} \quad \beta) \frac{Z\Theta}{Z\Gamma} = \frac{EH}{E\Delta} = \frac{4}{10} \quad \gamma) \frac{B\Theta}{B\Gamma} = \frac{AH}{A\Delta} = \frac{7}{13}$$



$$= \frac{1}{2} \quad = \frac{2}{5}$$

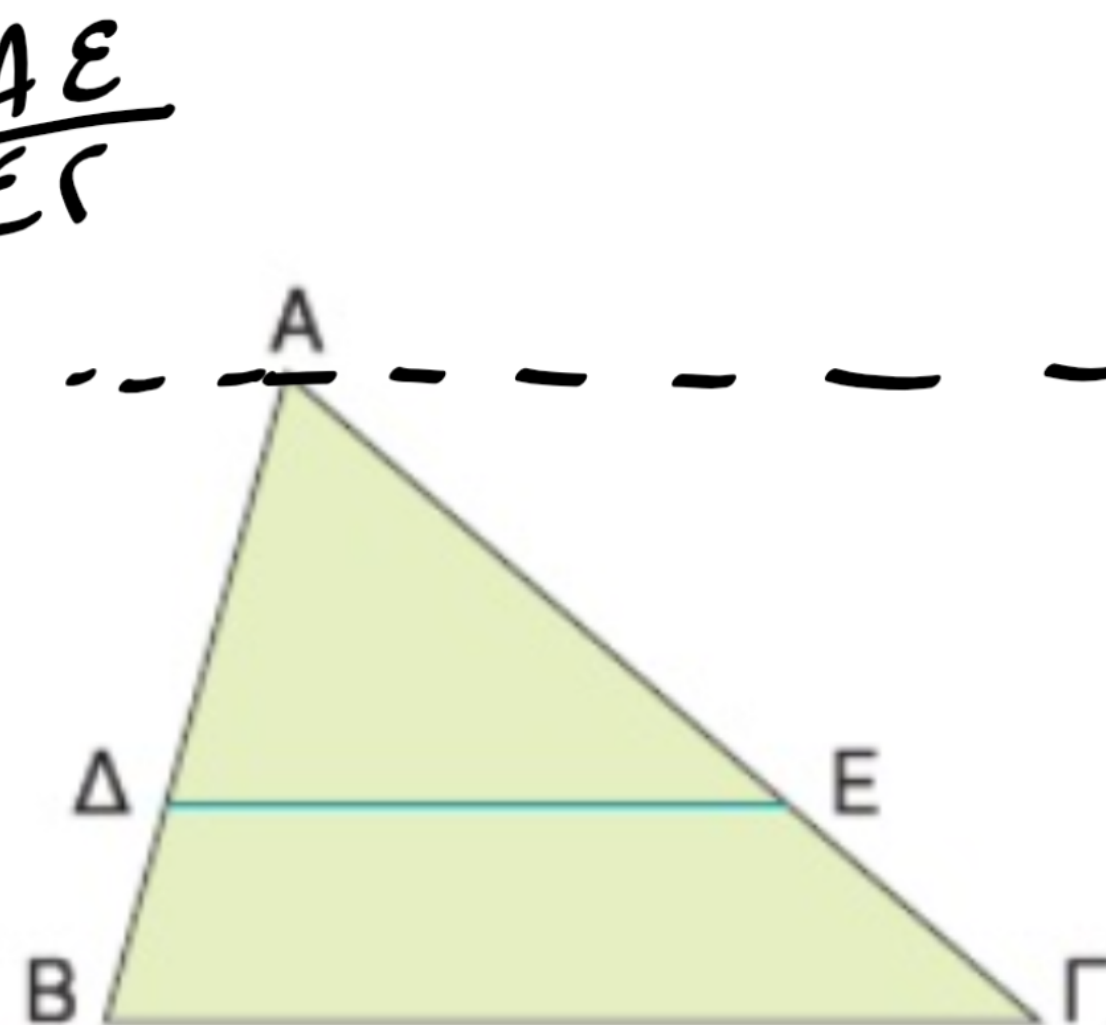
2 Αν ΔΕ // ΒΓ, να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις της επόμενης σελίδας με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

$$\alpha) \frac{\Delta B}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \quad \boxed{\Sigma}$$

$$\beta) \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{E\Gamma}{AE} \quad \boxed{\Lambda}$$

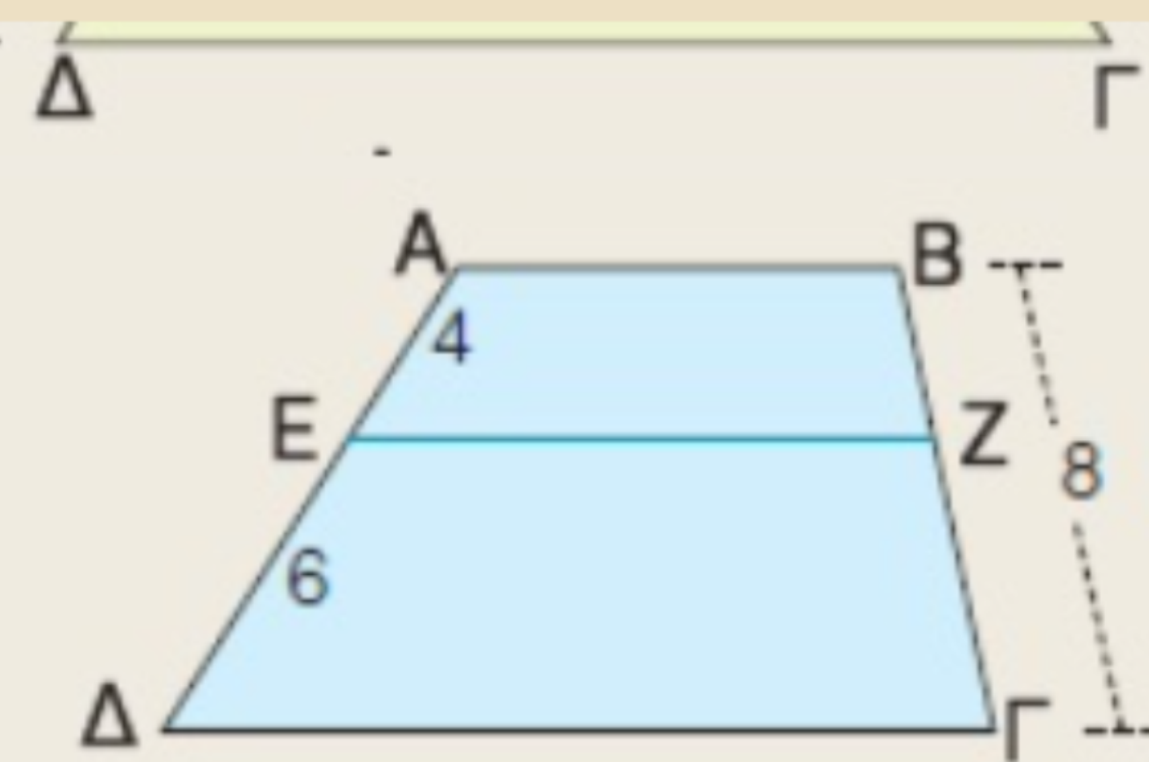
$$\gamma) \frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{E\Gamma} \quad \boxed{}$$

$$\delta) \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} \quad \boxed{}$$



2

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΖΓ.



$$AD = 4 + 6 = 10$$

$$10x = 32$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{BG}{BZ}$$

$$x = \frac{32}{10}$$

$$x = 3,2$$

$$\frac{10}{4} = \frac{8}{x}$$

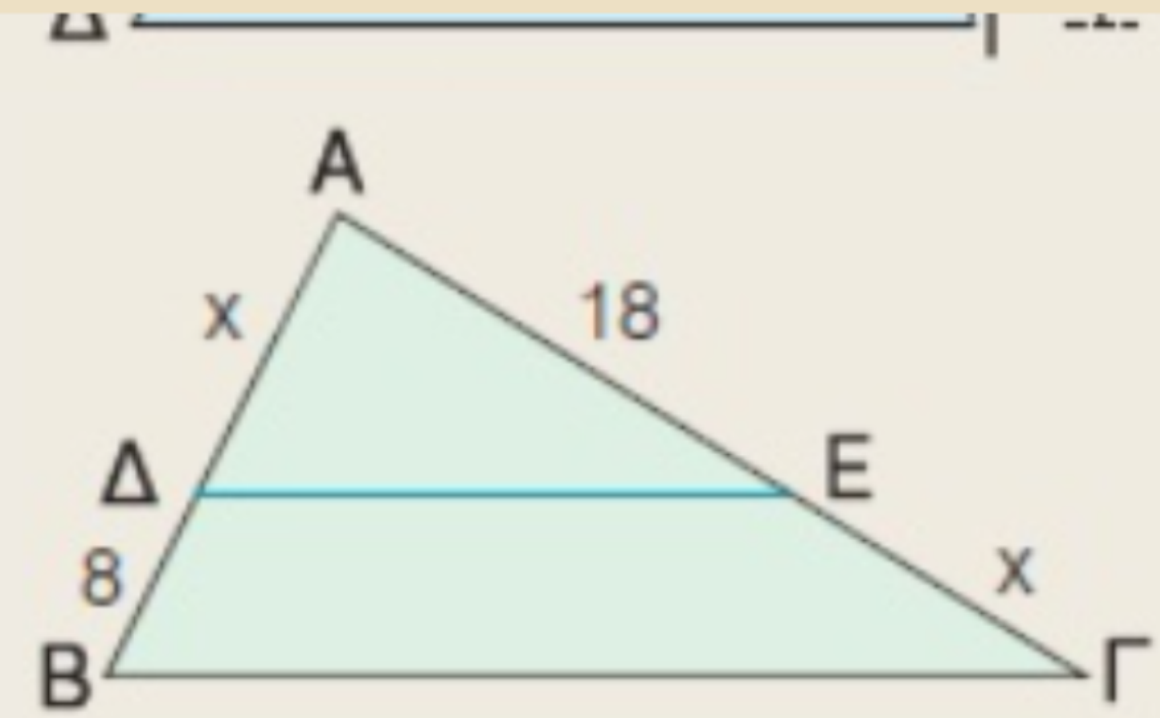
$$\text{αρα } BZ = 3,2$$

$$10 \cdot x = 4 \cdot 8$$

$$\text{και } ZG = 8 - 3,2 = 4,8$$

3 Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ. Να υπολογίσετε το χ.

Μικροπείραμα



Σύμφωνα με το

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$x = \sqrt{144}$$

$$x = 12$$

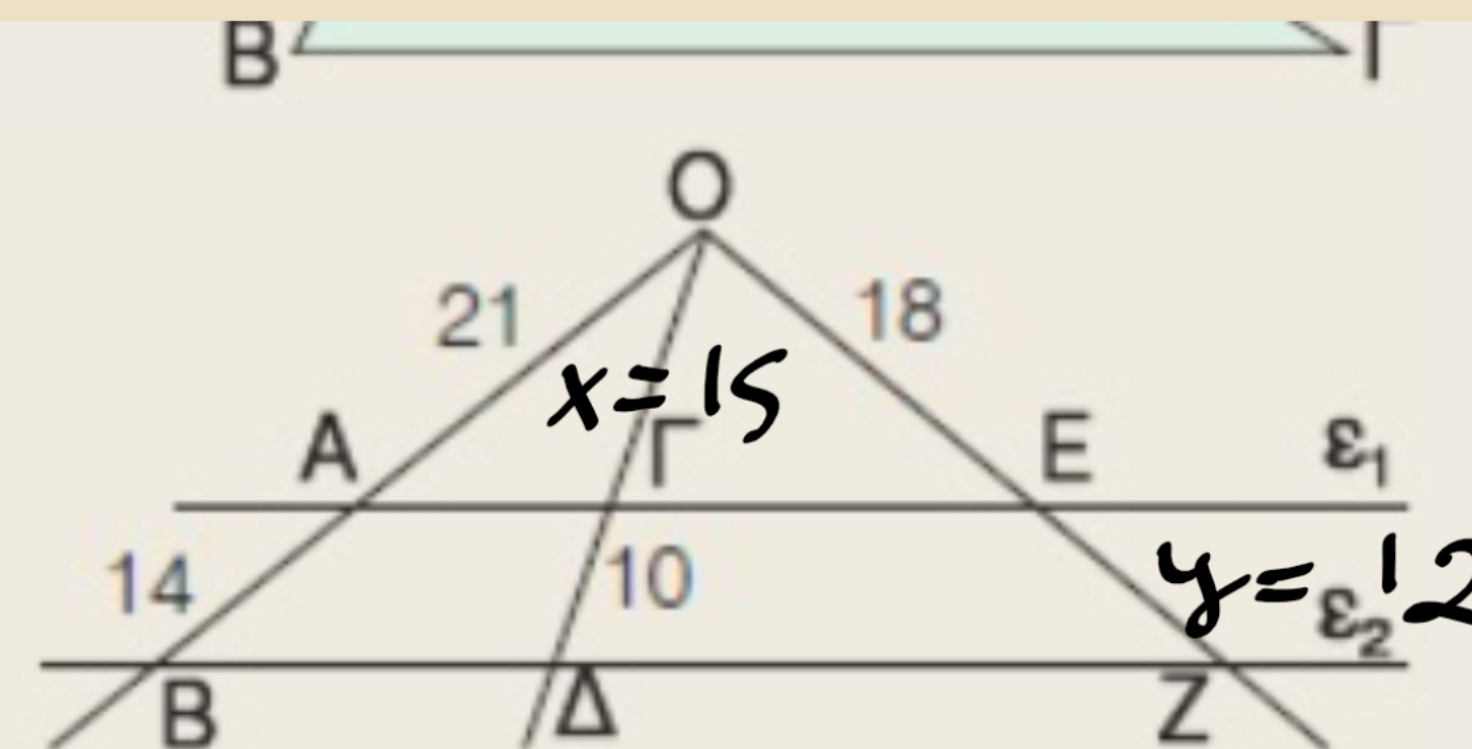
$$\frac{x}{8} = \frac{18}{x}$$

$$x^2 = 8 \cdot 18$$

$$x^2 = 144$$

4

Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΓ και ΕΖ.



Συνεπώς $\frac{OA}{AB} = \frac{OG}{GD}$

$$x = 15$$

Επίσης $\frac{OG}{GD} = \frac{OE}{EZ}$ $y = \frac{180}{15}$

$$\frac{15}{10} = \frac{18}{y} \quad y = 12$$

$$15 \cdot y = 18 \cdot 10$$

$$15y = 180$$

$$\begin{array}{r} 210' \\ 14 \overline{) 70} \end{array}$$

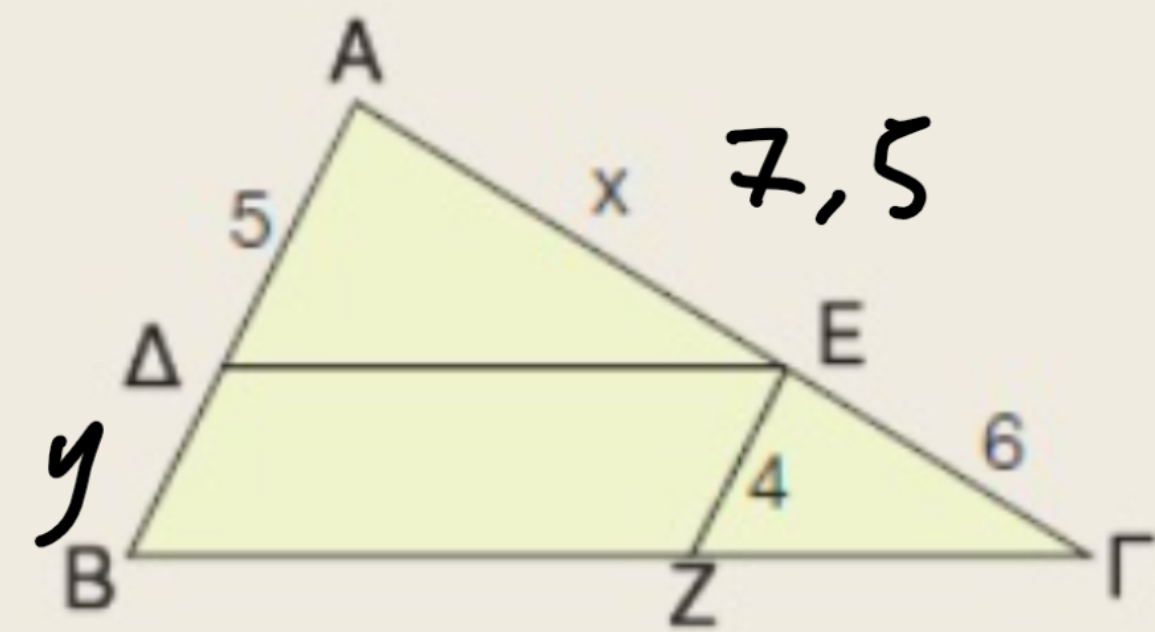
$$\frac{21}{14} = \frac{x}{10}$$

$$14 \cdot x = 21 \cdot 10$$

$$14x = 210$$

$$x = \frac{210}{14}$$

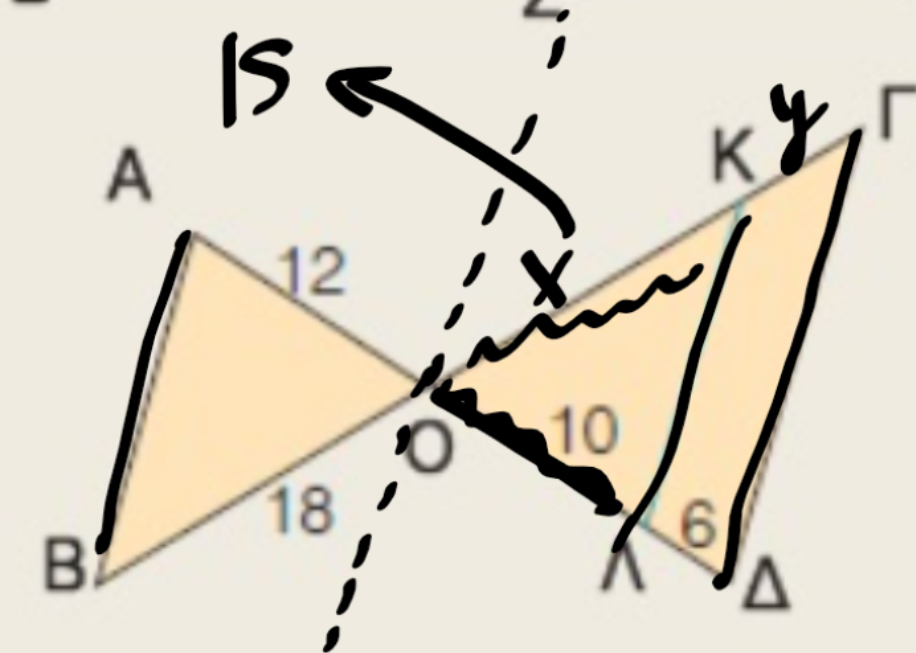
5 Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$, $EZ \parallel AB$. Να υπολογίσετε το x .



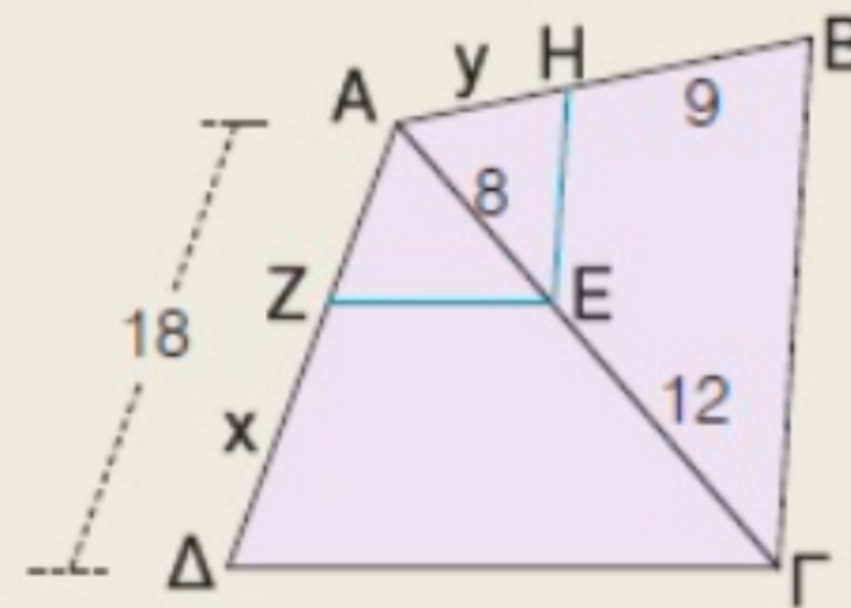
$$\Delta E \parallel B\Gamma \Rightarrow \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{AB}{B\Gamma} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{x}{6} \Rightarrow 4x = 30$$

$$x = 30/4 = 7,5$$

6 Στο διπλανό σχήμα είναι $AB \parallel \kappa\lambda \parallel \Gamma\Delta$. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα OK και $K\Gamma$.



7 Στο διπλανό σχήμα είναι $EZ \parallel \Delta\Gamma$ και $EH \parallel B\Gamma$. Να υπολογίσετε τα x, y .



6) Γίνεται α

$$\frac{OK}{\kappa\lambda} = \frac{OA}{BO}$$

$$\frac{10}{x} = \frac{12}{18}$$

$$12x = 180$$

$$x = \frac{180}{12} = 15$$

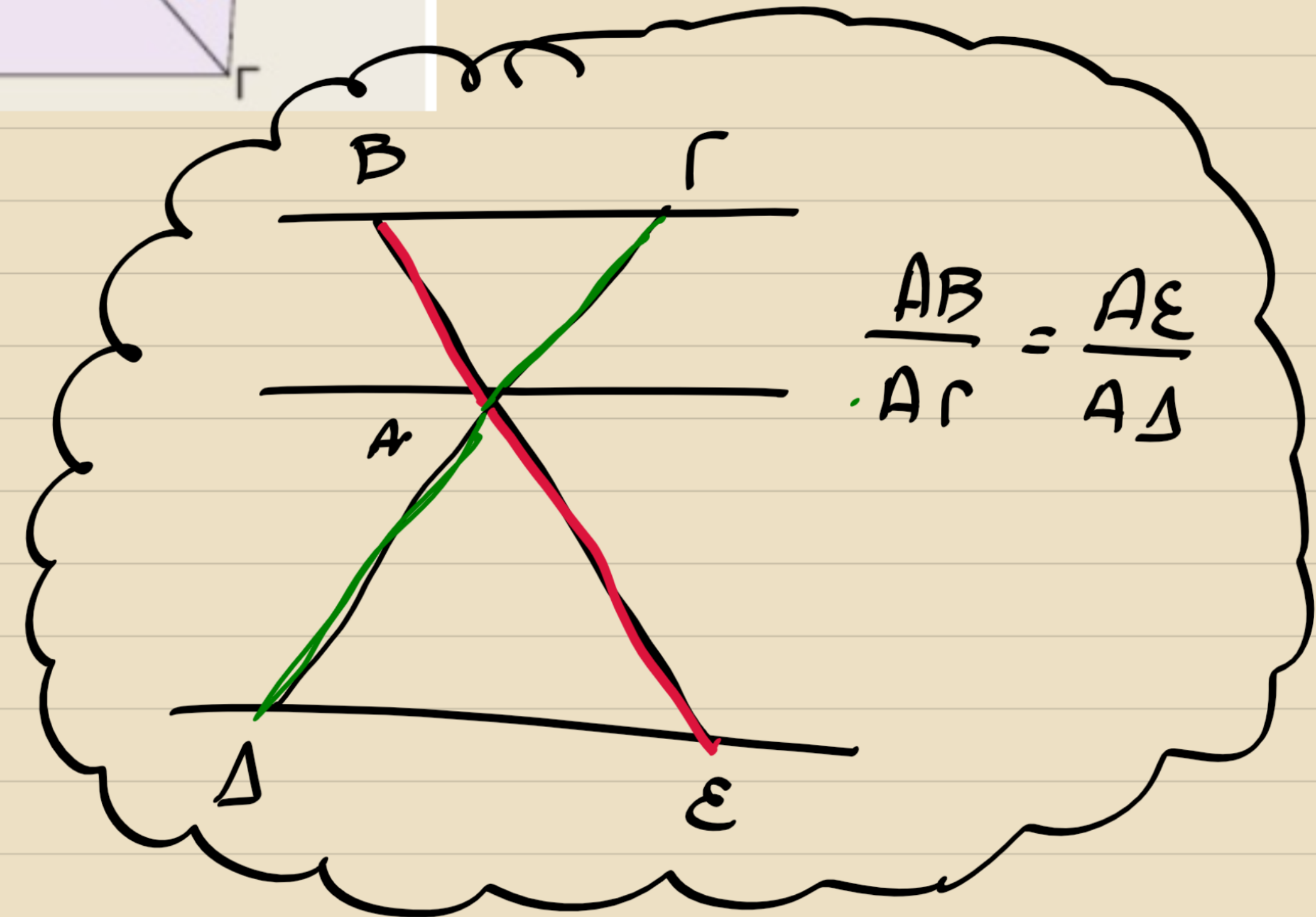
Γίνεται α

$$\frac{AG}{\kappa\Gamma} = \frac{OK}{\kappa\lambda}$$

$$\frac{6}{y} = \frac{10}{15}$$

$$10y = 90$$

$$y = 9$$

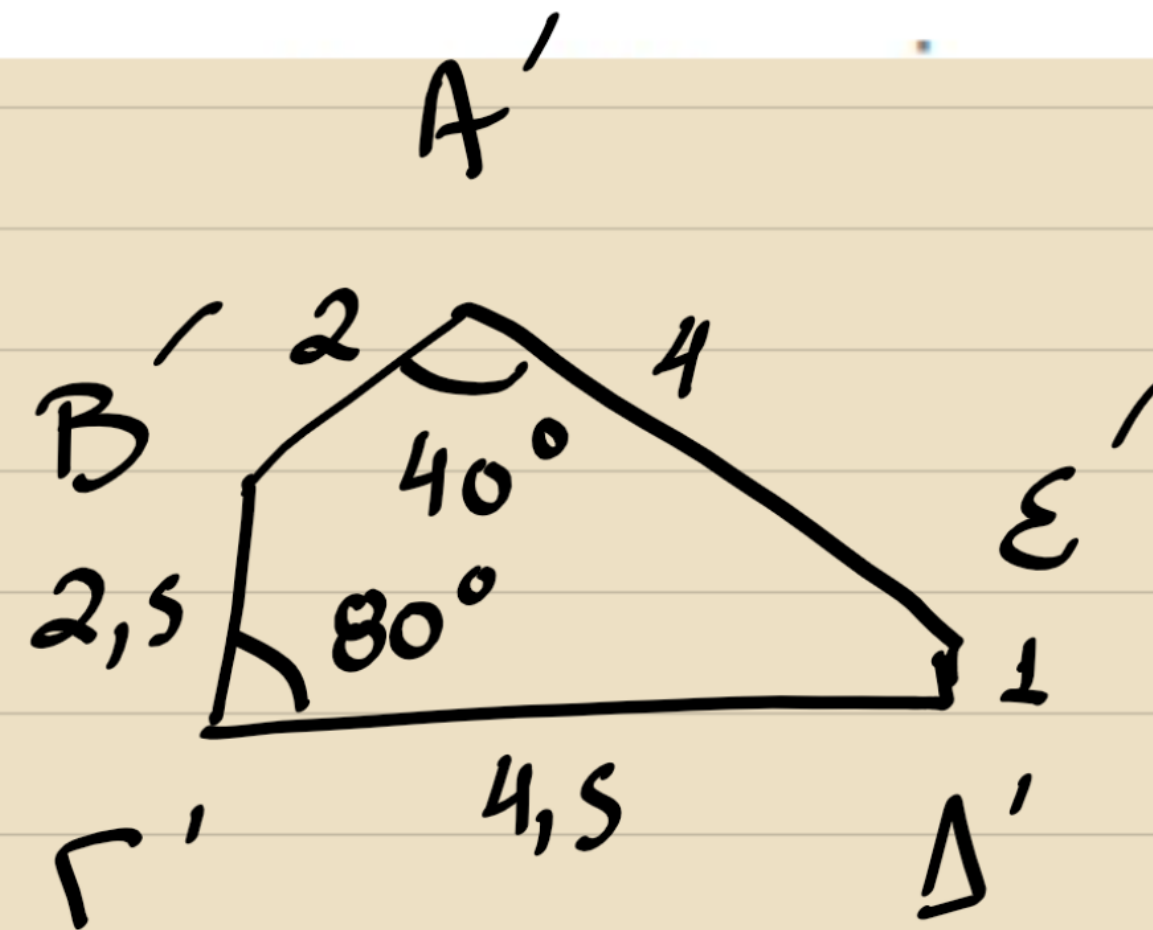
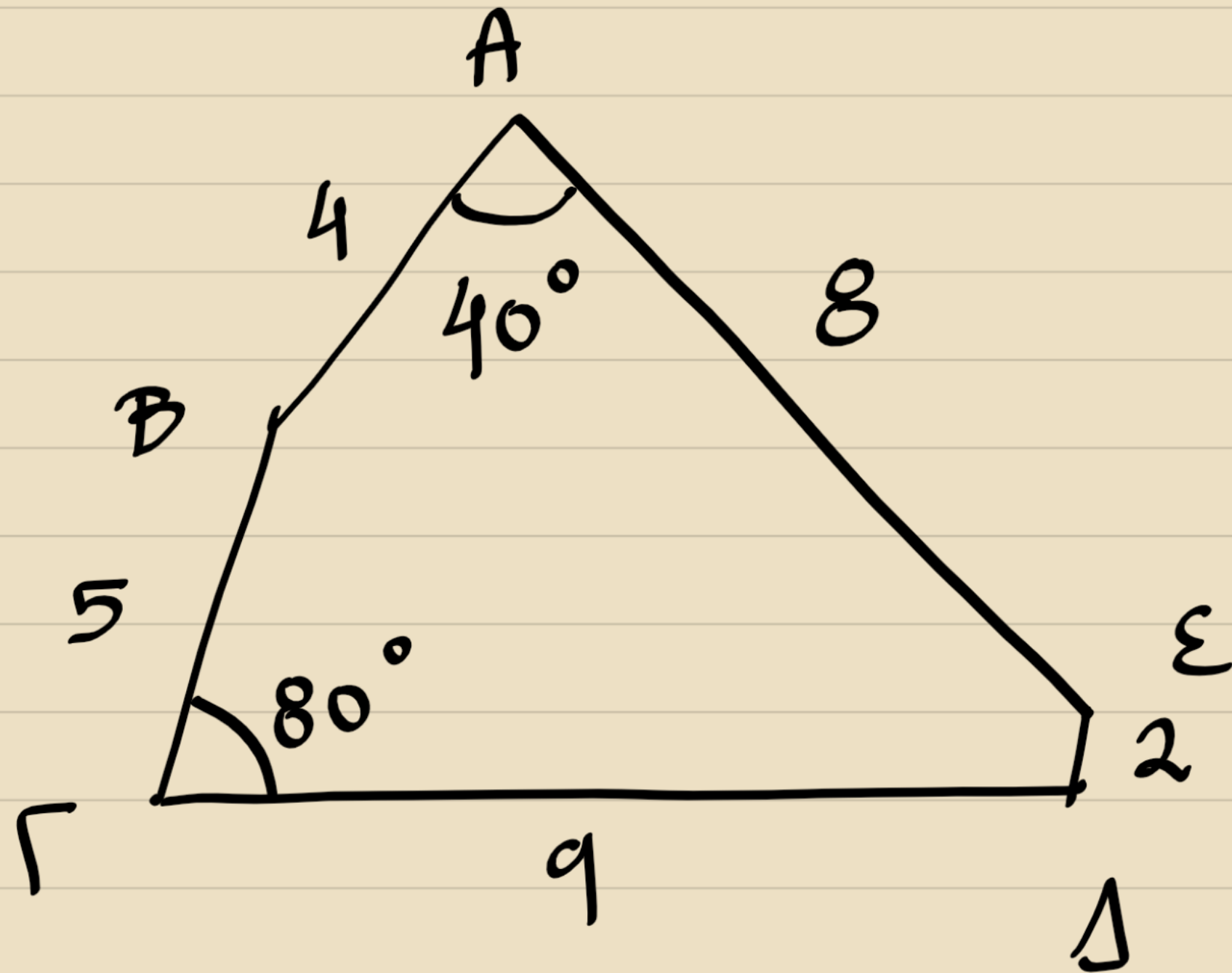




Ομοιότητα

Γενικά

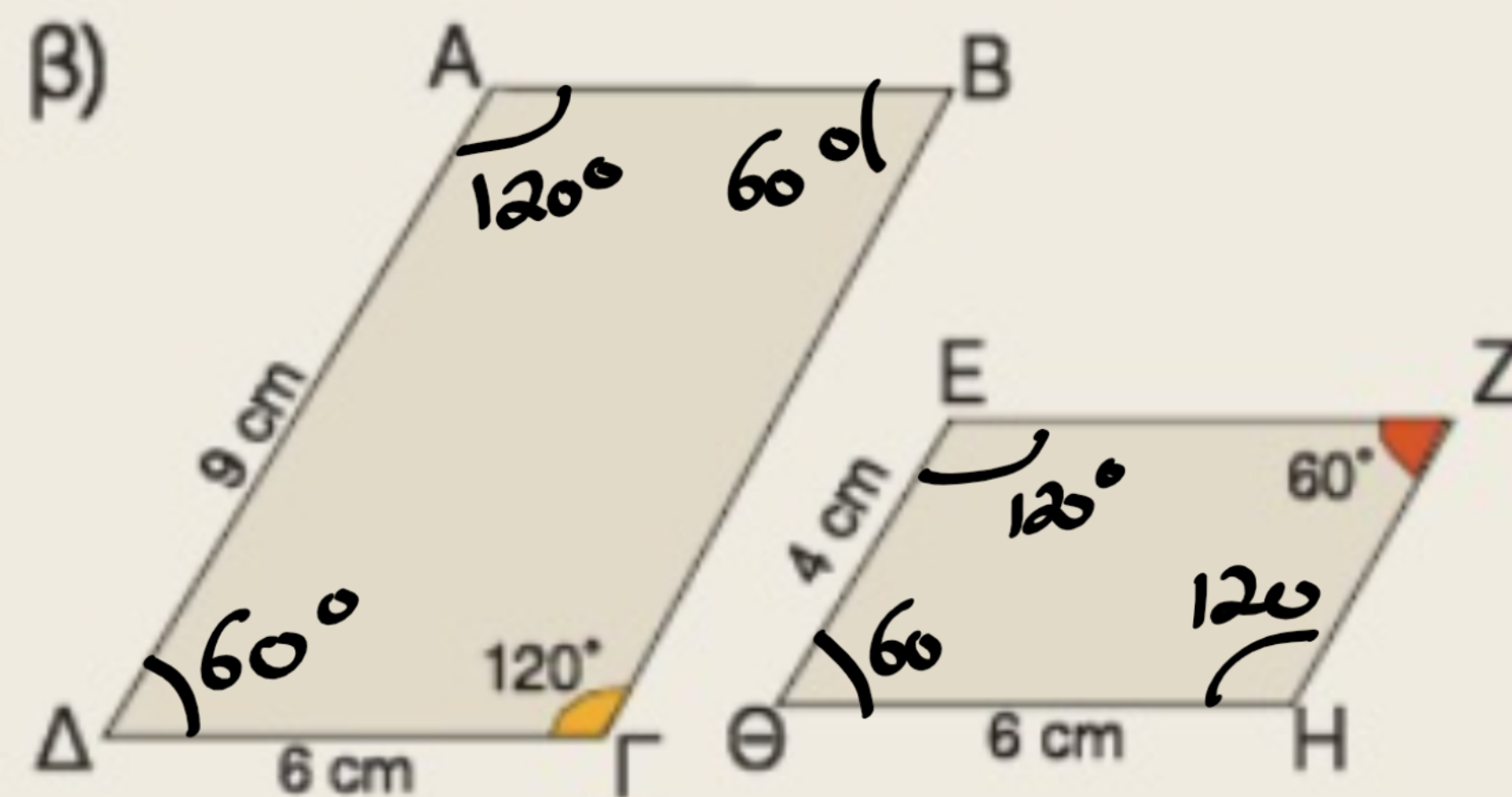
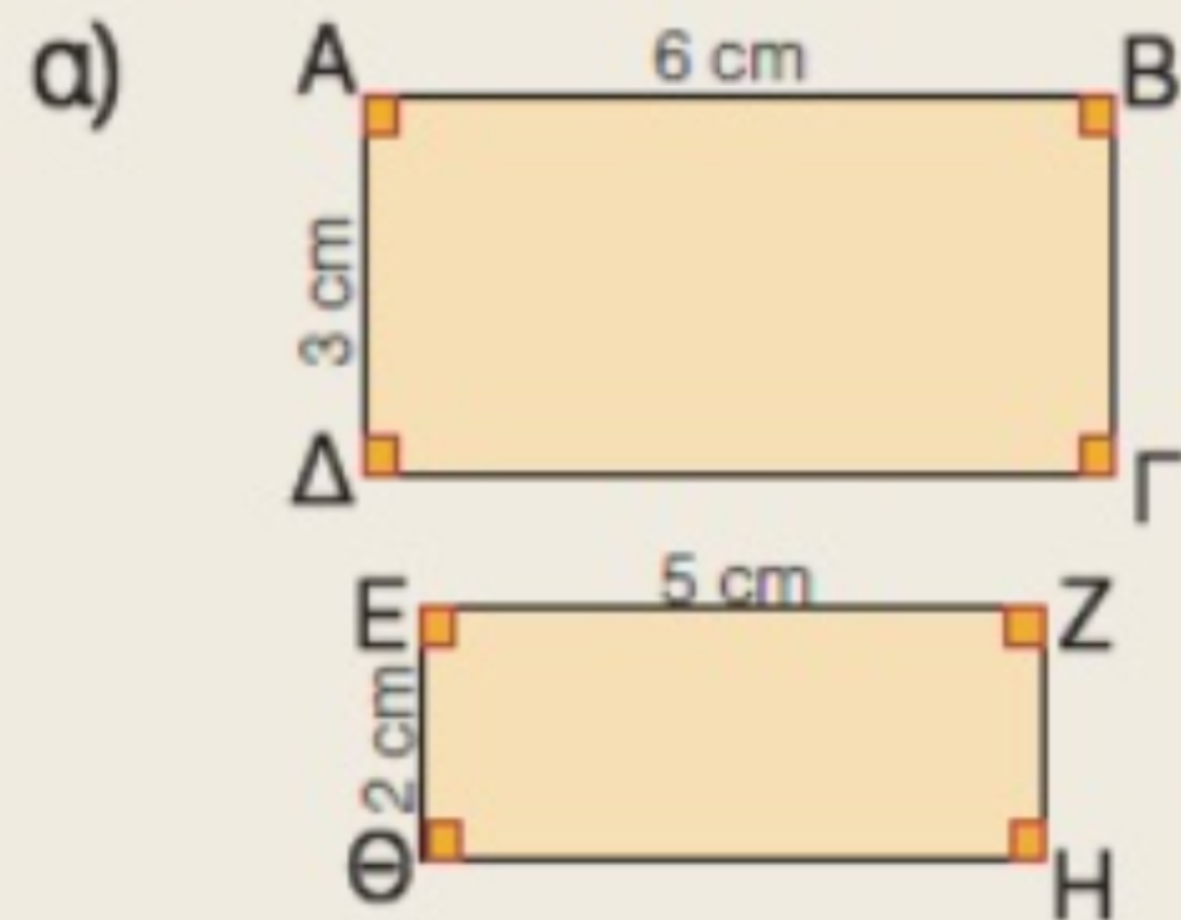
Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.



οπ $AB\Gamma\Delta\epsilon \approx A'B'\Gamma'\Delta'\epsilon'$

1

Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



θα πρέπει

$$\frac{AB}{EZ} = \frac{AD}{EH}$$

$$\frac{6}{5} = \frac{3}{2} \leadsto 6 \cdot 2 = 3 \cdot 5$$

$$12 = 15 \text{ Λάθος}$$

αφού
δεν είναι
όμοια.

θα πρέπει

$$\frac{AD}{EZ} = \frac{DC}{EH}$$

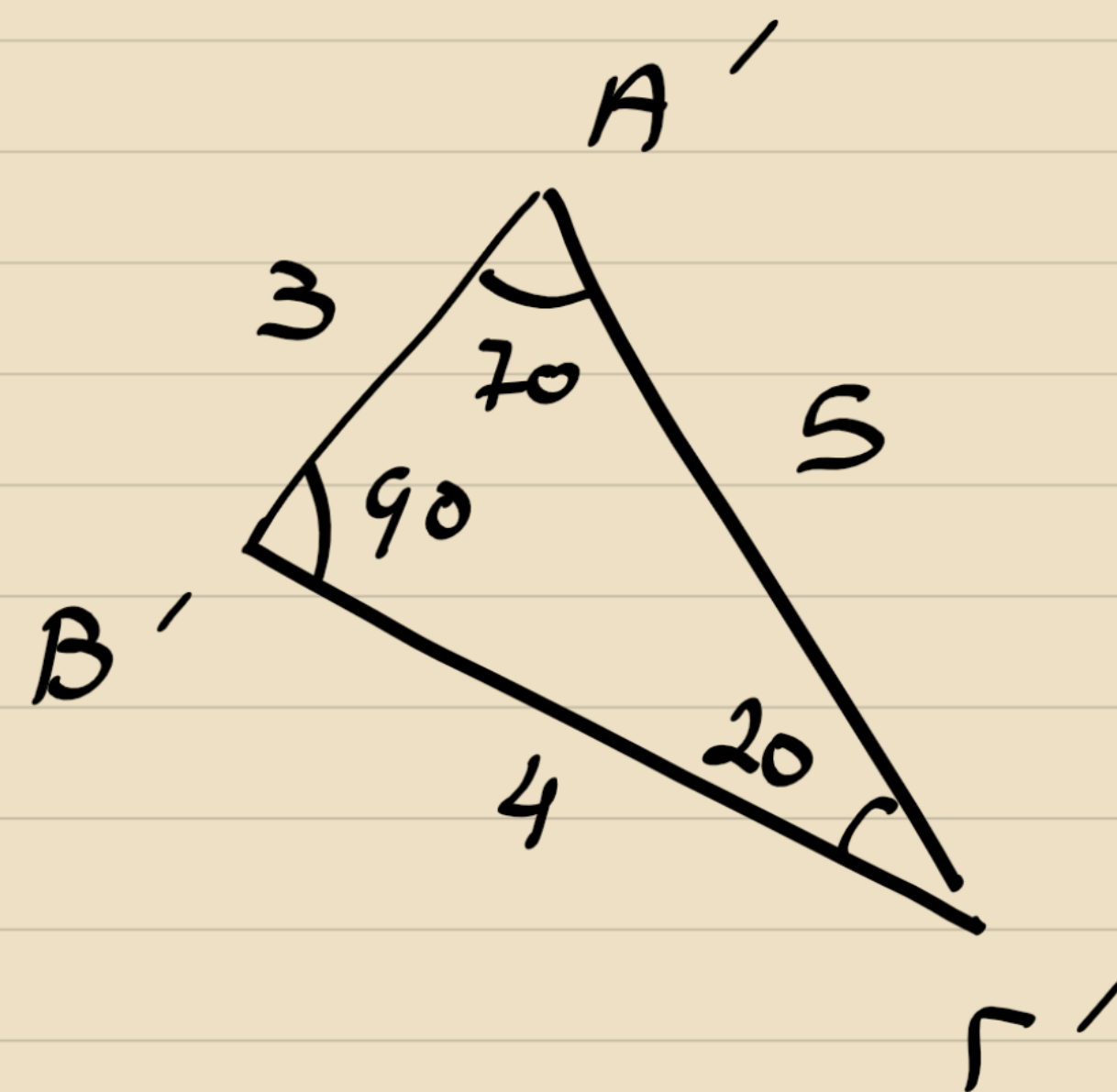
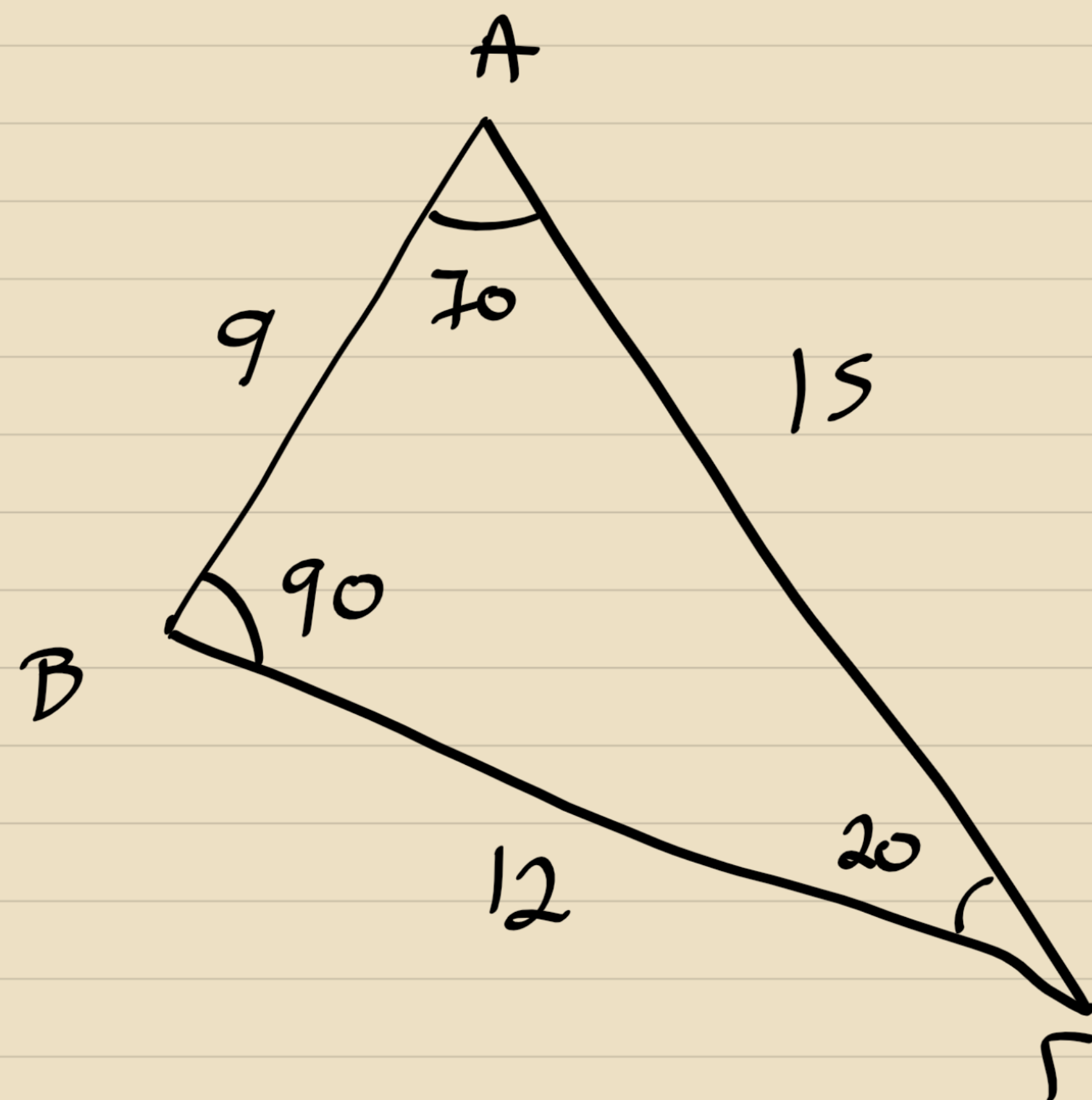
$$\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$$

$$9 \cdot 4 = 6 \cdot 6$$

$$36 = 36 \text{ Όχι}$$

αφού
είναι
όμοια

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = 3$$

$$\text{οτι } \triangle ABC \simeq \triangle A'B'C'$$

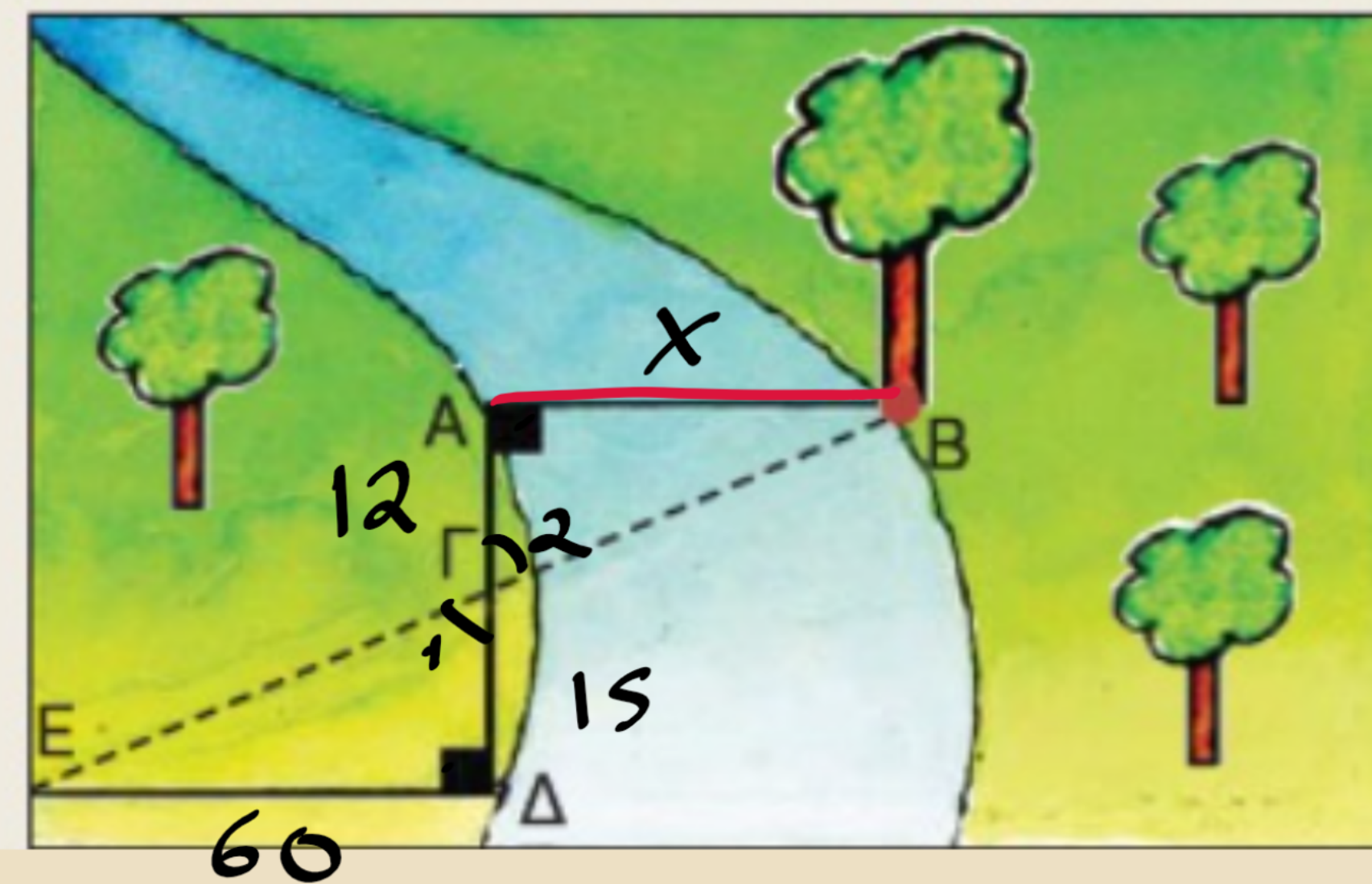
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{15}{5} = 3$$

4

Να βρείτε το πλάτος AB του ποταμού, αν $AG = 12$ m, $GD = 15$ m, $ED = 60$ m και $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$.



Έχω $\triangle ABG \approx \triangle GDE$

αφω $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$

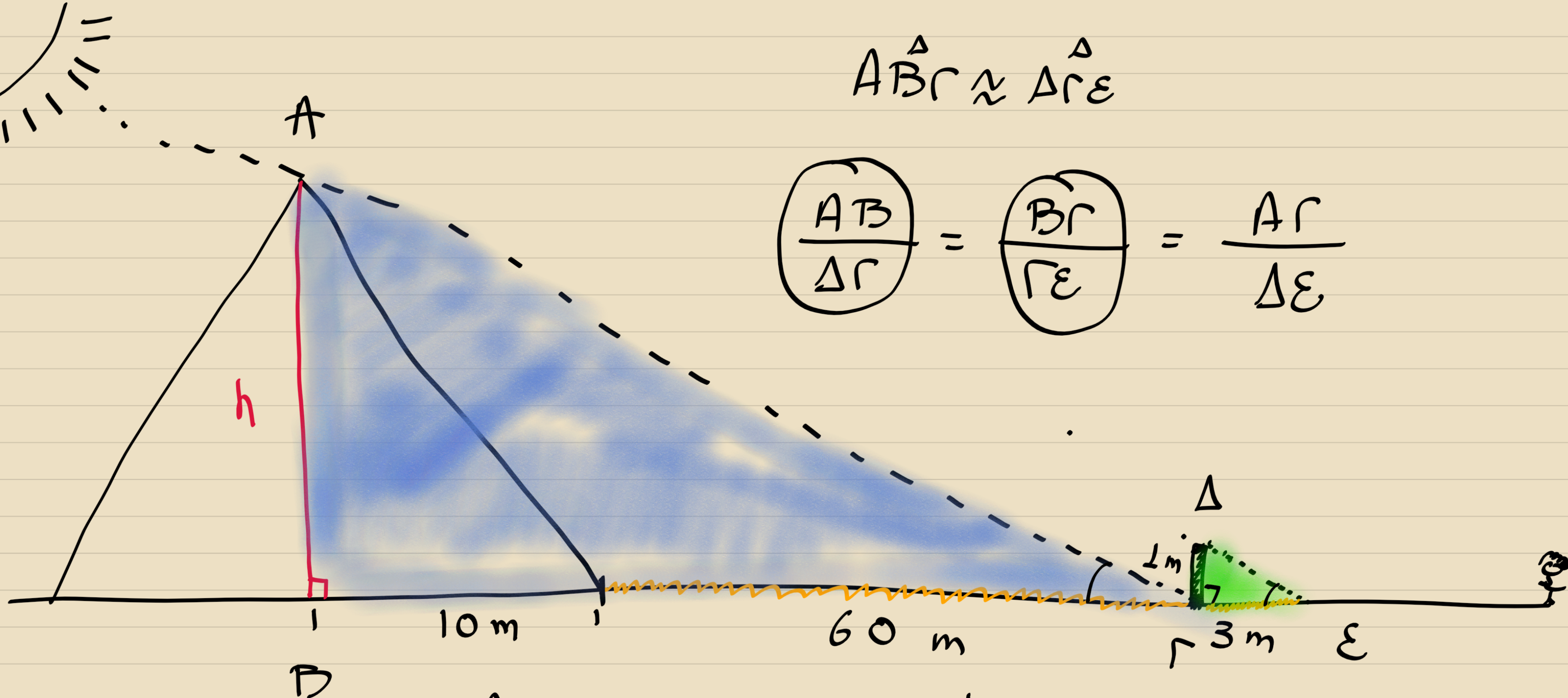
$\hat{G}_1 = \hat{G}_2$ ως

αακωαφω

φα
$$\frac{ED}{AB} = \frac{EG}{BG} = \frac{GD}{AG}$$

$$\Delta \hat{B}r \approx \Delta \hat{r}\epsilon$$

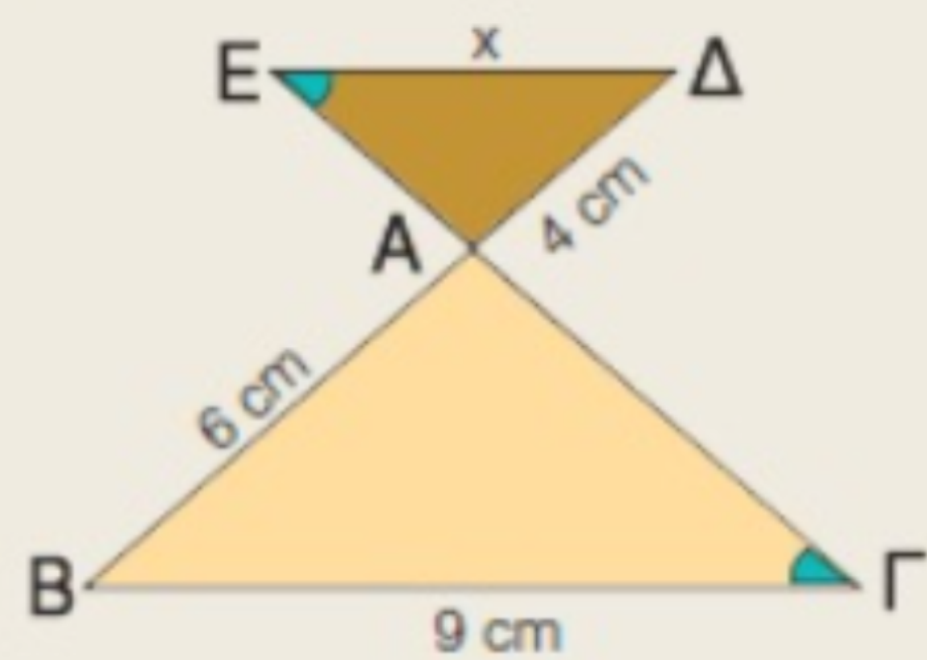
$$\left(\frac{AB}{\Delta r} \right) = \left(\frac{Br}{r\epsilon} \right) = \frac{Ar}{\Delta \epsilon}$$



$\frac{AB}{\Delta r} = \frac{Br}{r\epsilon}$
 and $\frac{h}{1} = \frac{70}{3}$
 $3h = 70$
 $h = \frac{70}{3} = 23,3$

1 Να υπολογίσετε το χ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

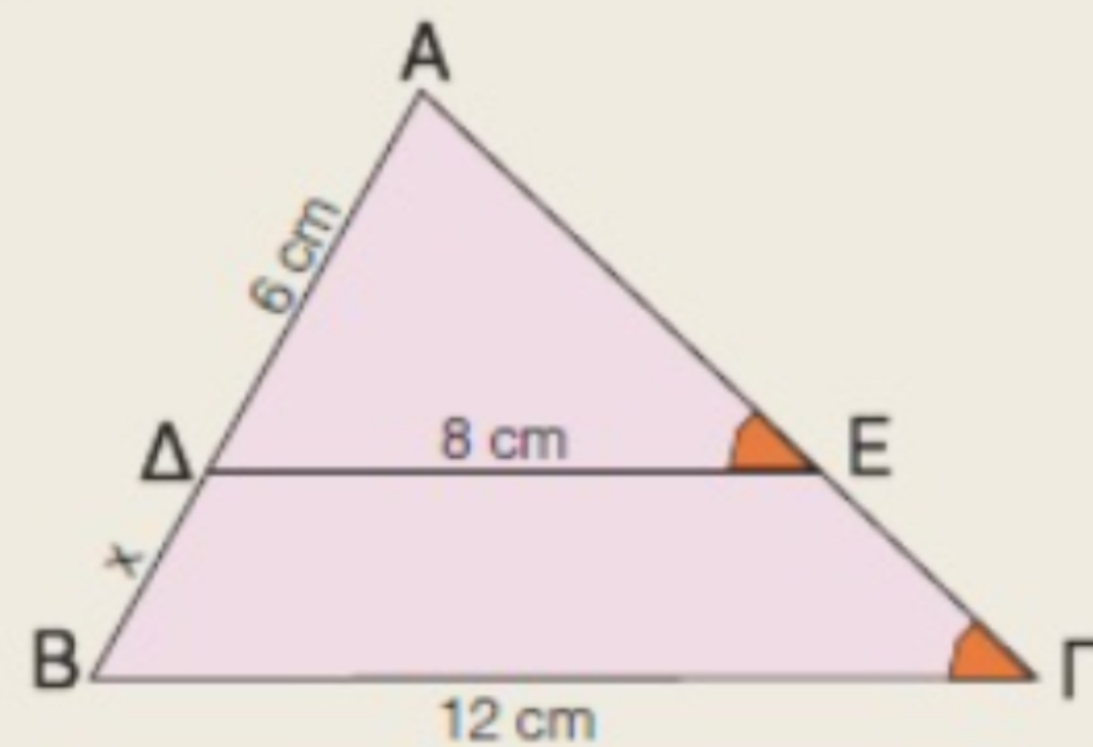
α)



β)



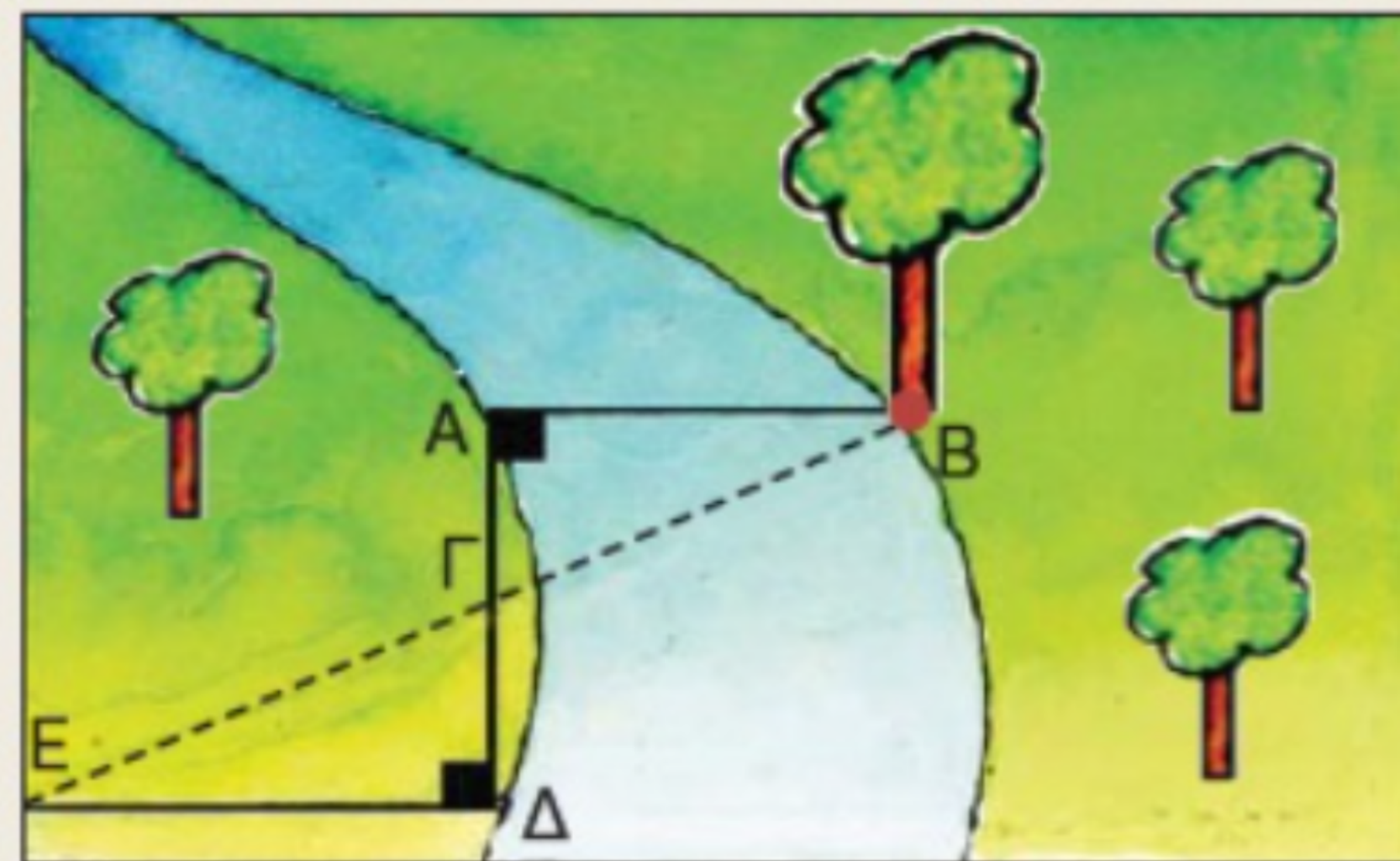
γ)



2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $A\Delta$ το ύψος του. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ είναι όμοια. Αν $\Delta B = 4 \text{ cm}$ και $\Delta \Gamma = 9 \text{ cm}$, να βρείτε το μήκος του τμήματος $A\Delta$.

- 4 Να βρείτε το πλάτος AB του ποταμού, αν $A\Gamma = 12 \text{ m}$, $\Gamma\Delta = 15 \text{ m}$, $E\Delta = 60 \text{ m}$ και $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$.



§ Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

Γενική τύπη: $ax + b = 0$ (a, b αριθμοί)

π.χ

• $2x + 6 = 0$

• $5x - 12 = 0$

• $3(x - 4) + 8 = 2(x - 5) + 6x - 4$

• $2x + 6 = 0$

$$2x = -6$$

$$x = -\frac{6}{2}$$

$$x = -3$$

• $5x - 12 = 0$

$$5x = 12$$

$$x = \frac{12}{5}$$

• $3(x - 4) + 8 = 2(x - 5) + 6x - 4$

$$3x - 12 + 8 = 2x - 10 + 6x - 4$$

$$3x - 2x - 6x = -8 - 10 - 4 + 12$$

$$-5x = -10$$

$$x = 2$$

► Παράσitos τύπος

$$2(x-1) + 5x = 6 - 3(x-1)$$

Πηα 1^ο: Επιτερίκακί's

$$2x - 2 + 5x = 6 - 3x + 3$$

Πηα 2^ο: Χωρίτω γνωκας στο αγνώκας

$$2x + 5x + 3x = 6 + 3 + 2$$

$$10x = 11$$

Πηα 3^ο: Διακρωί-ε ανάλκκκκκ
τα αγνώκκκκ

$$x = \frac{11}{10}$$

$$x = 1,1$$

► Σοκκκς τύπος

$$2(x-1) + 5x = 6 - 3(x-1)$$

$$2x - 2 + 5x = 6 - 3x + 3$$

$$7x - 2 = 9 - 3x$$

$$7x - \cancel{2} + \boxed{+2} = 9 - 3x + \boxed{+2}$$

$$7x = 9 - 3x + 2$$

$$7x + \boxed{+3x} = 9 - \cancel{3x} + 2 + \boxed{+3x}$$

$$7x + 3x = 9 + 2$$

$$10x = 11$$

$$\frac{10x}{10} = \frac{11}{10}$$

$$x = 1,1$$

1

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) -3(x + 2) - 2(x - 1) = 8 + x$$

$$\beta) 4y - 2(y - 3) = 2y + 1$$

$$\gamma) 5(-\omega + 2) - 4 = 6 - 5\omega$$

$$\delta) (2x + 1)^2 + 5 = 4(x^2 - 10)$$

2

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{6} = x - \frac{1}{3}$$

$$\beta) \frac{y+5}{5} - \frac{y}{2} = 1 - \frac{3y}{10}$$

$$\gamma) \frac{2(\omega-1)}{3} - \frac{\omega+1}{2} = \frac{\omega-5}{6}$$

$$\delta) 0,2(3x - 4) - 5(x - 0,4) = 0,4(1 - 10x)$$

3

Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττούμενο κατά 5 είναι ίσο με το μισό του αριθμού αυξημένο κατά 10. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

Μικροπείραμα



Μικροπείραμα



1

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $-3(x + 2) - 2(x - 1) = 8 + x$

β) $4y - 2(y - 3) = 2y + 1$

γ) $5(-\omega + 2) - 4 = 6 - 5\omega$

δ) $(2x + 1)^2 + 5 = 4(x^2 - 10)$

2

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{6} = x - \frac{1}{3}$

β) $\frac{y+5}{5} - \frac{y}{2} = 1 - \frac{3y}{10}$

γ) $\frac{2(\omega-1)}{3} - \frac{\omega+1}{2} = \frac{\omega-5}{6}$

δ) $0,2(3x-4) - 5(x-0,4) = 0,4(1-10x)$

$$3 \cdot \frac{x-1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{x+3}{6} = 6x - \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot (x-1) - (x+3) = 6x - 2$$

$$3x - 3 - x - 3 = 6x - 2$$

$$2x - 6 = 6x - 2$$

$$a) \quad \frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{6} = x - \frac{1}{3}$$

$$2x - 6x = 6 - 2$$

$$-4x = 4$$

$$6 \cdot \left(\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{6} \right) = 6 \cdot \left(x - \frac{1}{3} \right)$$

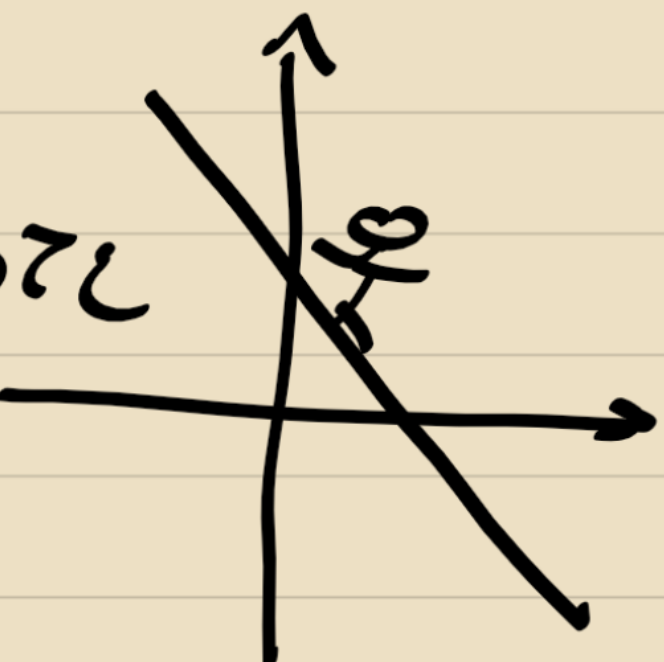
$$x = \frac{4}{-4}$$

$$x = -1$$

• Γενική γραφή εξίσωσης $L \equiv$ λωπει είναι $ax + b = 0$



• Η γραβική απεικόνιση της εξίσωσης $L \equiv$ λωπει είναι
η εωεία.

• Αν το $a > 0$ τότε  ενώ αν το $a < 0$ τότε 

• Το b μας δείχνει πω η εωεία τέινει τον
αξονα $y'y$.



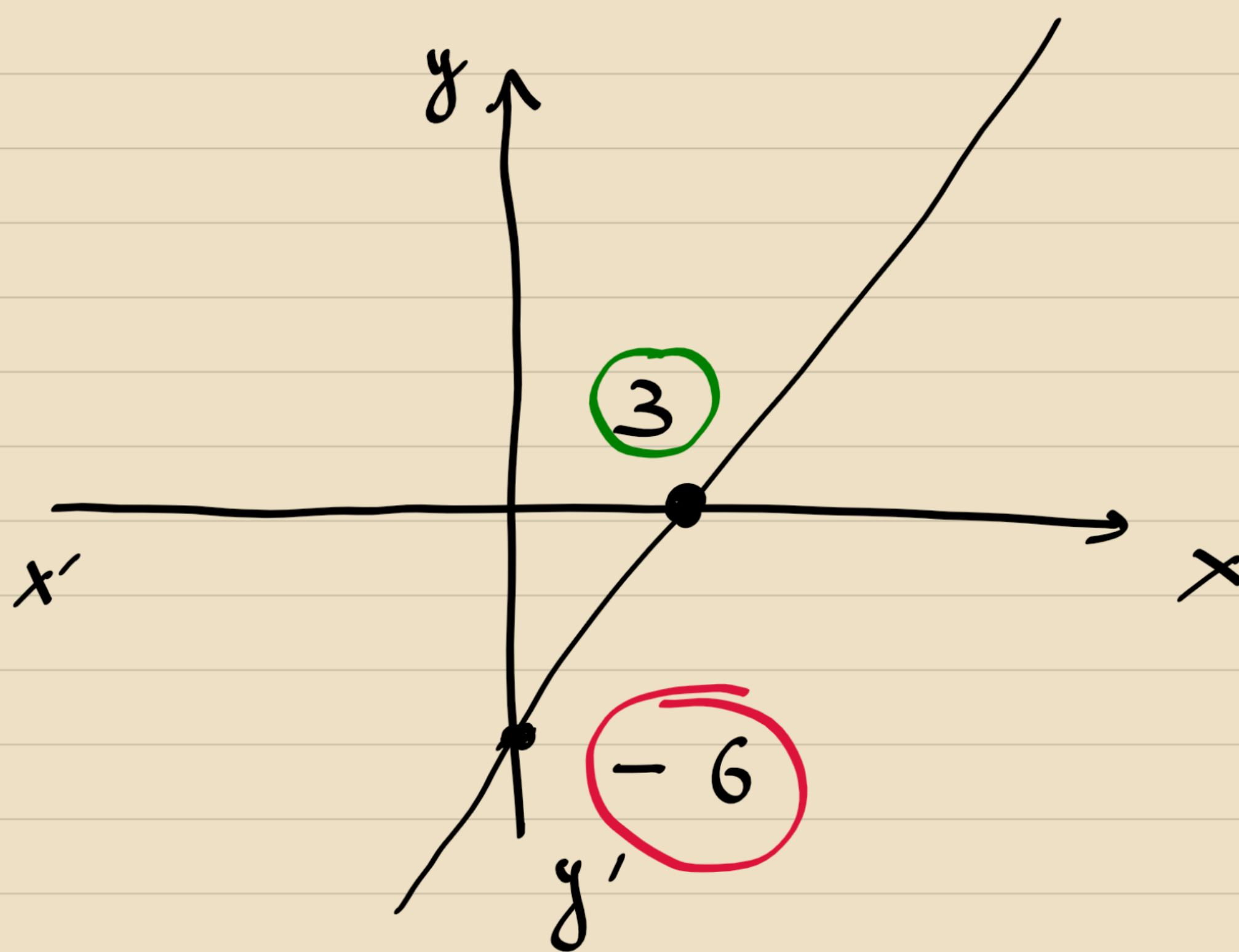
• Το σημείο πω η εωεία τέινει τον
αξονα $x'x$ είναι
η λύση της εξίσωσης.

π.χ

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$



• Αν η εξίσωση είναι αδύνατη τότε η εικόνα θα είναι
καμμένη σαν $x \times$



• Αν η εξίσωση είναι ομόρρητη τότε η εικόνα θα
ταυτίζεται με τον $x \times$



• Να δοθείσαι οι δύο να χαρτίσω και εξίσωση ναυτοου
λωττώ νφρνε να τα ναιω όλα ρω εν τξίος.

η.χ

$$2(x+4) - 6x = 7x - 6(x+3)$$

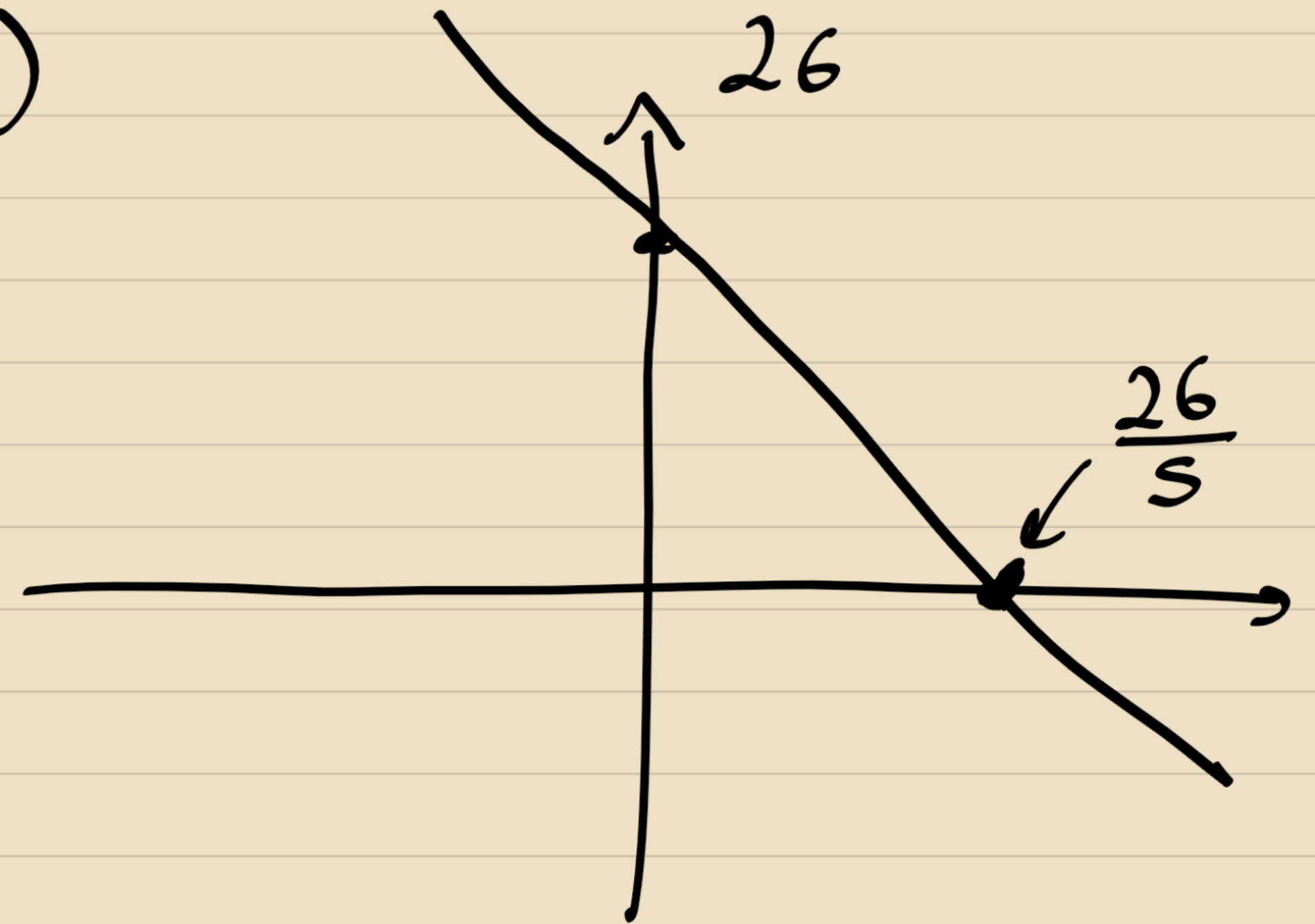
$$2x + 8 - 6x = 7x - 6x - 18$$

$$2x + 8 - \cancel{6x} - 7x + \cancel{6x} + 18 = 0$$

$$-5x + 26 = 0$$

$$-5x = -26$$

$$x = \frac{26}{5}$$



► Επόμενη ερώτηση: 2 ου καλύτερο 1-ε χρόνο διαχωρισ

• Γενοί' λυθεί' ερώτηση 2 ου καλύτερο:

$$ax^2 + bx + \gamma = 0, \quad a \neq 0$$

π.χ $x^2 - 3x + 2 = 0$, $\begin{matrix} a=1 \\ b=-3 \\ \gamma=2 \end{matrix}$

Ja λίστα του διαχωρισ

$$\Delta = b^2 - 4a\gamma$$

$$\Delta = b^2 - 4a\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

2

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 - x - 2 = 0$$

$$\beta) 4y^2 + 3y - 1 = 0$$

$$\gamma) -2\omega^2 + \omega + 6 = 0$$

$$\delta) 2z^2 - 3z + 1 = 0$$

$$\epsilon) -25t^2 + 10t - 1 = 0$$

$$\sigma\tau) 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\zeta) 3x^2 + 18x + 27 = 0$$

$$\eta) x^2 - 4x = 5$$

$$\theta) x^2 - 3x + 7 = 0$$

4

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 3x^2 - 2(x - 1) = 2x + 1$$

$$\beta) (y + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5(2y + 3)$$

$$\gamma) (2\omega - 3)^2 - (\omega - 2)^2 = 2\omega^2 - 11$$

$$\delta) \varphi(8 - \varphi) - (3\varphi + 1)(\varphi + 2) = 1$$

► Εξίσωση 2 ου βαθμού (ΕΜΜΕΙΣ)
 $ax^2 + bx + \gamma = 0$

1) $ax^2 + \gamma = 0$ ($b = 0$)

π.χ $x^2 - 9 = 0$ $\begin{matrix} a=1 \\ b=0 \\ \gamma=-9 \end{matrix}$

a way
 $x^2 - 9 = 0$

$(x-3)(x+3) = 0$

$x-3=0$ ή $x+3=0$

$x=3$

$x=-3$

b way
 $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm \sqrt{9}$

$x = \pm 3$

c way
 $x^2 - 9 = 0$

$\begin{matrix} a=1 \\ b=0 \\ \gamma=-9 \end{matrix}$

$\Delta = b^2 - 4a\gamma = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{matrix} 3 \\ -3 \end{matrix}$

$$2) \quad ax^2 + bx = 0 \quad (c=0)$$

$$\underline{\underline{n.x}} \quad 3x^2 - 6x = 0$$

a way

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x \cdot (x - 2) = 0$$

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

or

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

b way

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= -6 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm 6}{6} =$$

$$= \begin{cases} \frac{12}{6} = 2 \\ \frac{0}{6} = 0 \end{cases}$$

3

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 7x = 0$

β) $x^2 - 16 = 0$

i) με τη βοήθεια του τύπου

ii) με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x^2-1}{3} - \frac{x+3}{5} = x-2$

β) $\frac{y^2}{3} - \frac{6y+1}{4} = \frac{y-2}{6} - 2$

γ) $0,5t^2 - 0,4(t+2) = 0,7(t-2)$

δ) $\frac{\omega}{2} (\sqrt{3}\omega - 7) = -\sqrt{3}$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18 \pm \sqrt{4}}{10} = \frac{2}{10} \text{ and } \frac{1,6}{10}$$

α) $\frac{x^2-1}{3} - \frac{x+3}{5} = x-2$

$15 \left(\frac{x^2-1}{3} - \frac{x+3}{5} \right) = 15 \cdot (x-2)$

$5 \cdot \frac{x^2-1}{3} - 3 \cdot \frac{x+3}{5} = 15x-30$

$5 \cdot (x^2-1) - 3 \cdot (x+3) = 15x-30$

$5x^2 - 5 - 3x - 9 = 15x - 30$

$5x^2 - 14 - 3x = 15x - 30$

$5x^2 - 14 - 3x - 15x + 30 = 0$

$5x^2 - 18x + 16 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ay = (-18)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 16$

$= 324 - 320 = 4$

$a = 5$
 $b = -18$
 $\gamma = 16$

5

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x^2 - 1}{3} - \frac{x + 3}{5} = x - 2$$

$$\beta) \frac{y^2}{3} - \frac{6y + 1}{4} = \frac{y - 2}{6} - 2$$

$$\gamma) 0,5t^2 - 0,4(t + 2) = 0,7(t - 2)$$

$$\delta) \frac{\omega}{2} (\sqrt{3}\omega - 7) = -\sqrt{3}$$

$$y = \frac{-b}{2a} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$\beta) \frac{y^2}{3} - \frac{6y + 1}{4} = \frac{y - 2}{6} - 2$$

$$12 \cdot \left(\frac{y^2}{3} - \frac{6y + 1}{4} \right) = 12 \left(\frac{y - 2}{6} - 2 \right)$$

$$4y^2 - 3(6y + 1) = 2(y - 2) - 24$$

$$4y^2 - 18y - 3 = 2y - 4 - 24$$

$$(2y - 5)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

$$4y^2 - 18y - 3 = 2y - 4 - 24$$

$$4y^2 - 18y - 3 - 2y + 4 + 24 = 0$$

$$4y^2 - 20y + 25 = 0$$

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= -20 \\ \gamma &= 25 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4a\gamma = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 400 - 400 = 0$$

5

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x^2 - 1}{3} - \frac{x + 3}{5} = x - 2$$

$$\beta) \frac{y^2}{3} - \frac{6y + 1}{4} = \frac{y - 2}{6} - 2$$

$$\gamma) 0,5t^2 - 0,4(t + 2) = 0,7(t - 2)$$

$$\delta) \frac{\omega}{2} (\sqrt{3}\omega - 7) = -\sqrt{3}$$

$$\delta) \frac{\omega}{2} (\sqrt{3}\omega - 7) = -\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\omega^2 - 7\omega = -2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\omega^2 - 7\omega + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\alpha = \sqrt{3} \quad \beta = -7 \quad \gamma = 2\sqrt{3}$$

$$2. \frac{\omega}{2} (\sqrt{3}\omega - 7) = 2(-\sqrt{3})$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} =$$

$$= 49 - 8 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$$

$$\omega (\sqrt{3}\omega - 7) = -2\sqrt{3}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 \pm 5}{2\sqrt{3}} = \begin{cases} \frac{12}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \\ \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Multiplizieren
mit 4a

$$4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 4a \cdot 0$$

$$4a^2 x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + 4ac = 0$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b = -4ac$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = \Delta$$

1). $\Delta > 0$ weil $2ax + b = \pm \sqrt{\Delta}$
 $2ax = -b \pm \sqrt{\Delta}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

3). $\Delta < 0$ weil $\sqrt{\Delta}$ imaginär

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$4(x^2 - 3x + 2) = 4 \cdot 0$$

$$4x^2 - 12x + 8 = 0$$

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 8 = 0$$

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 = -8$$

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 3^2 - 8$$

$$(2x - 3)^2 = 1$$

$$2x - 3 = \pm 1$$

$$2x = 3 \pm 1$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2} = \frac{1}{2} \text{ oder } 2$$

2). $\Delta = 0$ weil

$$(2ax + b)^2 = 0$$

$$2ax + b = 0$$

$$2ax = -b$$

$$x = -b/2a$$

§ Παραγοντοποίηση φωνήτων

Αν έχω το φωνήτων ax^2+bx+c με $a \neq 0$ και x_1, x_2
οι ρίζες τότε $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

π.χ x^2-3x+2

a way

$$\begin{aligned}x^2-3x+2 &= \\x^2-x-2x+2 &= \\x(x-1)-2(x-1) &= \\(x-1)(x-2) &= \end{aligned}$$

b way

$$\begin{aligned}x^2-3x+2 &= \\1(x-\underline{1}) \cdot (x-\underline{2}) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2-3x+2 &= 0 \\a=1 \quad \Delta &= b^2-4ac \\b=-3 \quad &= 9-4 \cdot 1 \cdot 2 \\c=2 \quad &= 9-8=1 \\x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \\&= \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \end{aligned}$$

n.x

$$2x^2 + 5x + 3 =$$

$$2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)(x+1) = \\ (2x+3)(x+1)$$

$$2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$a=2$$

$$b=5$$

$$c=3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \\ = 25 - 24 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm 1}{4}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \\ -\frac{4}{4} = -1 \end{array} \right\}$$

n.x

$$4x^2 - 4x + 1$$

a way

$$4x^2 - 4x + 1 =$$

~~16~~
tactatna

$$(2x-1)^2$$

b way

$$4x^2 - 4x + 1 =$$

$$4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) =$$

$$4(x - \frac{1}{2})^2 =$$

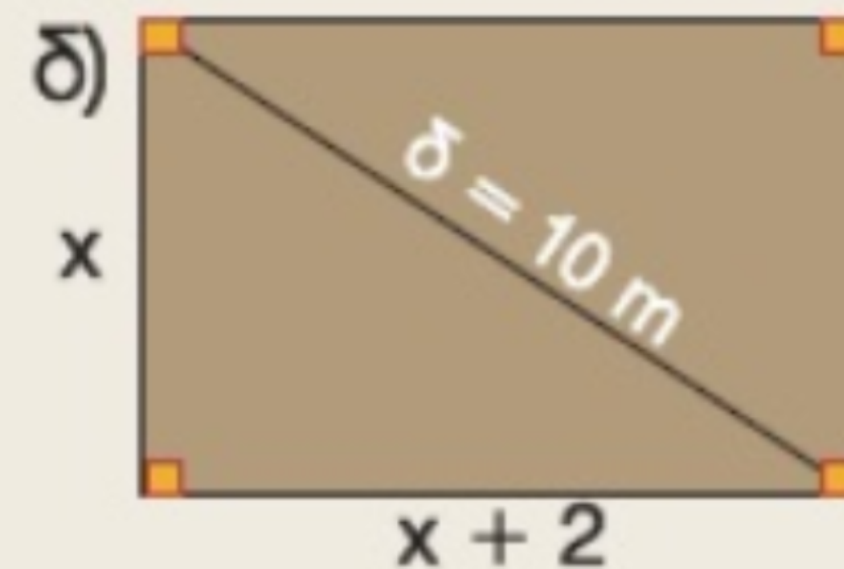
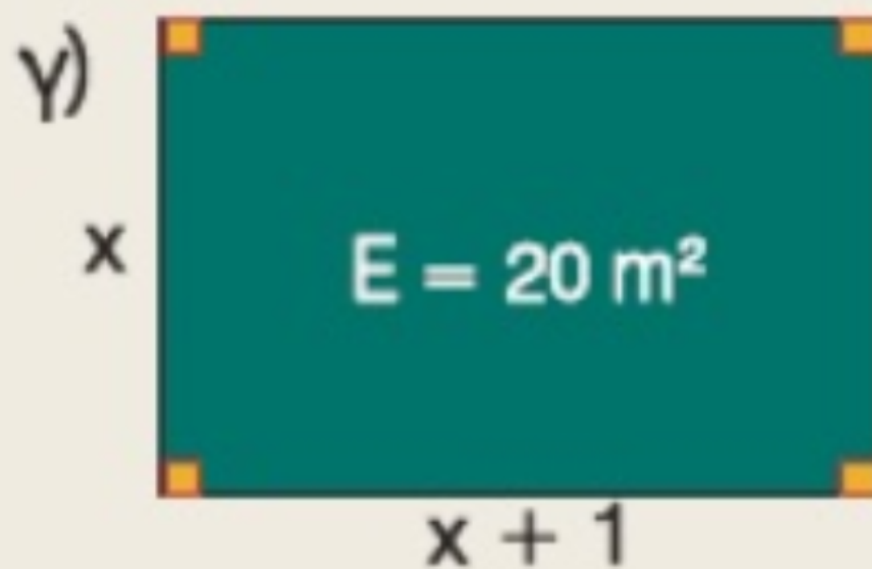
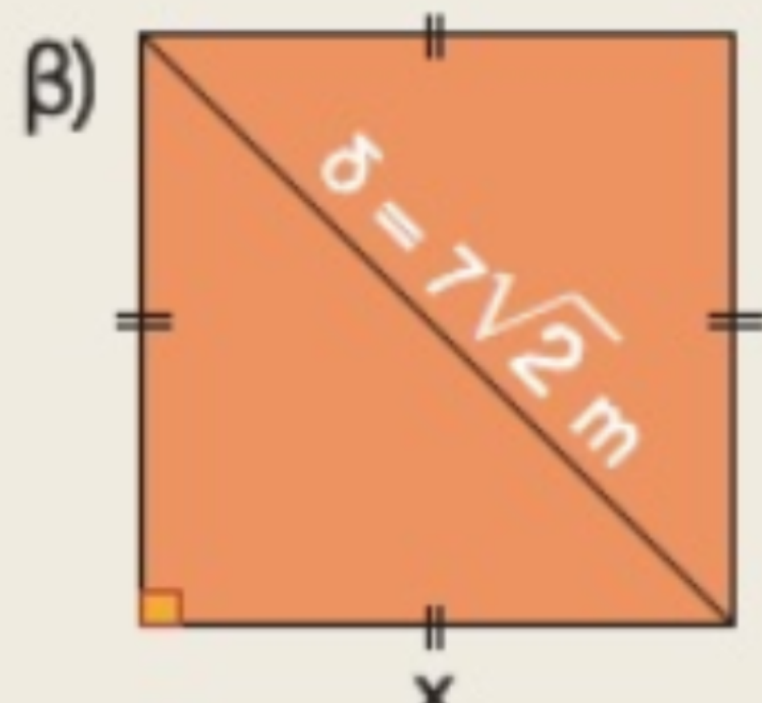
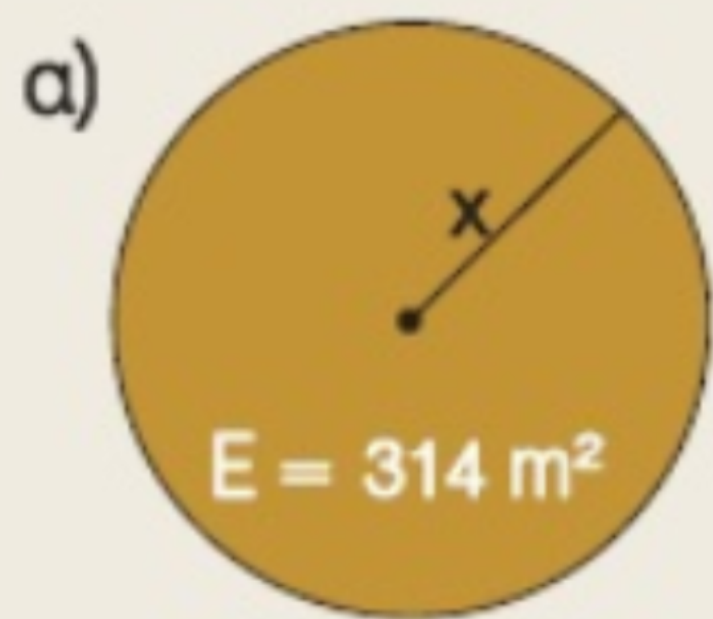
$$(2x-1)^2 =$$

$$\left(\begin{array}{l} 4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad a=4 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad b=-4 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad c=1 \\ \Delta = b^2 - 4ac = \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad = 16 - 16 = 0 \\ x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Sin hi
Dien

1

Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις.



1) γ) Γνωστού

$$x \cdot (x+1) = 20$$

$$x^2 + x = 20$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$a = 1$$

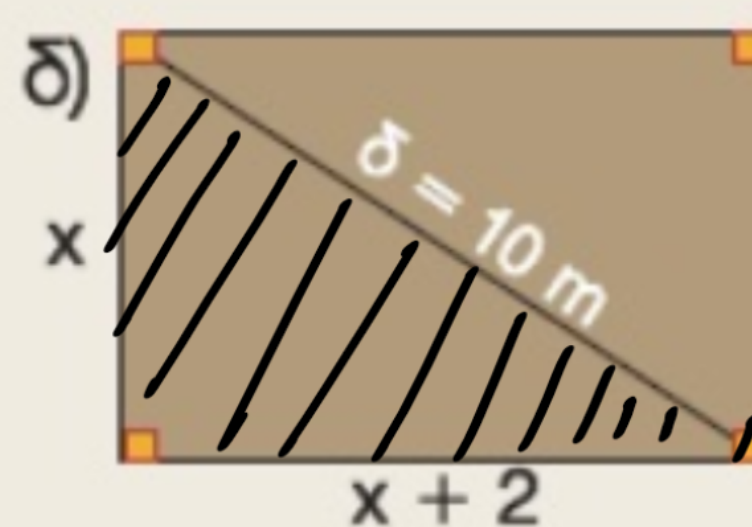
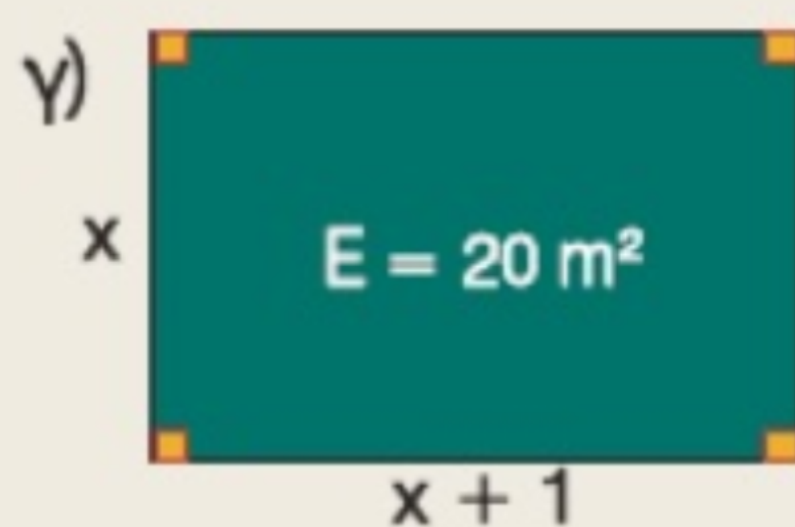
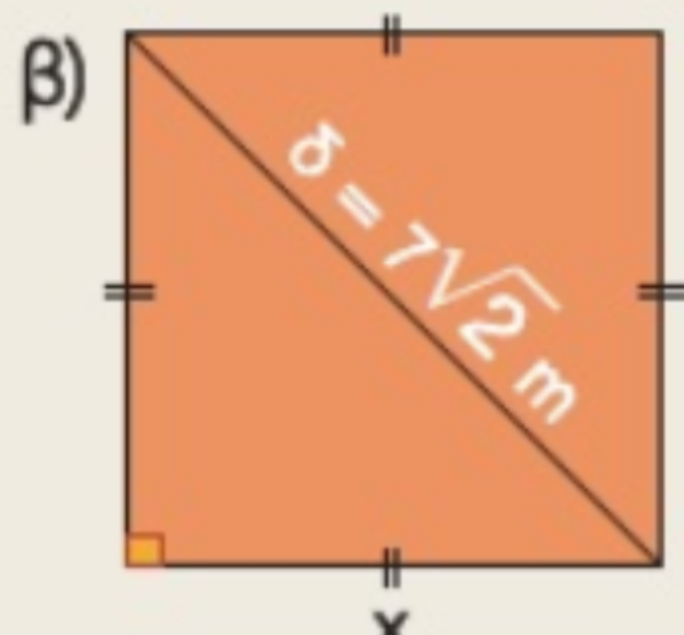
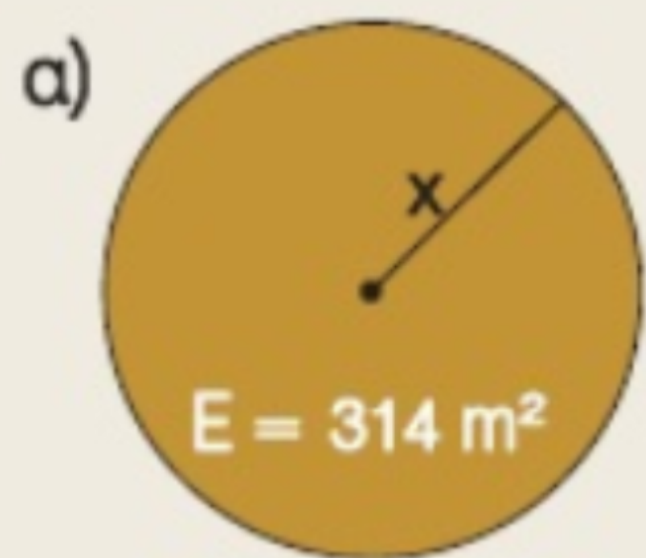
$$b = 1$$

$$c = -20$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{2} = \begin{matrix} -5 \\ 4 \end{matrix} \text{ αποκ}$$

1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις.



ε) Ίσχυει από Π.Θ.

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \\ a &= 0 \quad \text{ή} \quad b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 2 \\ \gamma &= -48 \end{aligned}$$

$$10^2 = x^2 + (x+2)^2$$

$$100 = x^2 + x^2 + 4x + 4$$

$$100 = 2x^2 + 4x + 4$$

$$2x^2 + 4x + 4 - 100 = 0$$

$$2x^2 + 4x - 96 = 0$$

$$2 \cdot (x^2 + 2x - 48) = 0$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = \\ &= 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = \\ &= 4 + 192 = 196 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} =$$

$$= \frac{-2 \pm 14}{2} = \begin{cases} 6 \\ -8 \text{ απαρ.} \end{cases}$$