

§ Παίζεις πηζών αλγεβρικών παραστάσεων

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 8} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{15}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{a \cdot \delta}{b \cdot \gamma}$$

Σχ.Β.σελ 77

1 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{y}$

β) $\frac{9x}{4y} \cdot \frac{1}{3x}$

γ) $12x^2 \cdot \frac{1}{9x}$

δ) $\frac{2a^3}{3b^2} \cdot \frac{6b}{4a^2}$

ε) $(-5\omega^2) \cdot \frac{3}{10\omega}$

στ) $(-\frac{3a\beta}{2\beta}) \cdot (-\frac{4}{a^2})$

2 Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) $8x : \frac{6}{x}$

β) $\frac{1}{y^2} : (-\frac{3}{y})$

γ) $(-\frac{a^2}{\beta^3}) : 3a^2$

δ) $(-\frac{x^3}{2\omega}) : (-\frac{x^2}{4\omega^2})$

1) δ) $\frac{2a^3}{3b^2} \cdot \frac{6b}{4a^2} =$

$$\frac{2a^3 \cdot 6b}{3b^2 \cdot 4a^2} = \frac{12a^3 b}{12b^2 a^2} = \frac{a}{b}$$

ε) $\frac{9x}{4y} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{9x}{12xy} =$

$$= \frac{3}{4y}$$

ε) $(-5\omega^2) \cdot \frac{3}{10\omega} =$

$$\frac{-15\omega^2}{10\omega} = -\frac{3\omega}{2}$$

2

Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) $8x : \frac{6}{x}$

β) $\frac{1}{y^2} : \left(-\frac{3}{y}\right)$

γ) $\left(-\frac{a^2}{\beta^3}\right) : 3a^2$

δ) $\left(-\frac{x^3}{2\omega}\right) : \left(-\frac{x^2}{4\omega^2}\right)$

$$\left\{ \frac{-a}{\beta} = \frac{-a}{-\beta} = -\frac{a}{\beta} \right.$$

$$\beta) \quad \frac{1}{y^2} : \left(-\frac{3}{y}\right) = \frac{1}{y^2} \cdot \left(-\frac{y}{3}\right) = \frac{-y}{3y^2} = \frac{-1}{3y}$$

$$\delta) \quad \left(-\frac{x^3}{2\omega}\right) : \left(-\frac{x^2}{4\omega^2}\right) = \left(-\frac{x^3}{2\omega}\right) \cdot \left(-\frac{4\omega^2}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{x^3} \cdot 4\omega^2}{2\omega \cdot \cancel{x^2}} = x \cdot 2 \cdot \omega = 2x\omega$$

3 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \frac{2x+6}{x^2} \cdot \frac{4x}{x+3} & \beta) \frac{y-5}{y+2} \cdot \frac{2+y}{5-y} & \gamma) \frac{x-\omega}{x^2\omega^3} \cdot \frac{x^3\omega^2}{x^2-\omega^2} \\ \delta) \frac{a^2-4}{a^2+a-6} \cdot \frac{a+3}{a^2+2a} & \epsilon) \frac{x^2+x}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x} & \sigma\tau) \frac{4y^2-9}{4y^2-12y+9} \cdot \frac{y^2+3y}{2y^2+3y} \end{array}$$

4 Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \frac{x+4}{5} : \frac{x+4}{15} & \beta) \frac{2y-1}{y+1} : \frac{1-2y}{1+y} & \gamma) \left(-\frac{\omega+2}{\omega}\right) : (\omega+2) \\ \delta) \frac{a+1}{\beta^2} : \frac{(a+1)^2}{\beta} & \epsilon) \frac{x+y}{x^2-xy} : \frac{x^2+xy}{x-y} & \sigma\tau) \frac{x^2-4}{x^3+8} : \frac{x-2}{x^2-2x+4} \end{array}$$

$$3) \quad \delta) \quad \frac{x-\omega}{x^2\omega^3} \cdot \frac{x^3\omega^2}{x^2-\omega^2} = \frac{x-\omega}{x^2\omega^3} \cdot \frac{x^3\omega^2}{(x-\omega)(x+\omega)} =$$

$$\frac{\cancel{(x-\omega)} \cdot \cancel{x^3} \omega^{\cancel{2}}}{\cancel{x^2} \omega^3 \cdot \cancel{(x-\omega)}(x+\omega)} = \frac{x}{\omega \cdot (x+\omega)}$$

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες

α) $x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{xy}$

☐

β) $x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$

☐

γ) $3x : \frac{2}{x} = \frac{3}{2}$

☐

δ) $3x : \frac{2}{x} = \frac{3x^2}{2}$

☐

ε) $\frac{x-1}{y} \cdot \frac{5}{x-1} = \frac{5}{y}$

☐

στ) $\frac{a}{x} \cdot \frac{x-2}{x} = \frac{ax-2}{x^2}$

☐

ζ) $\frac{a}{a^2+1} \cdot \frac{a^2+1}{a} = 0$

☐

η) $\frac{a}{\beta+2} : \frac{a}{\beta+2} = 1$

☐

2 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $3x \cdot \frac{\dots\dots\dots}{y} = \frac{6x^2}{y}$

β) $\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{\dots\dots\dots} = \frac{1}{y^2}$

γ) $\frac{4x}{y} : \frac{\dots\dots\dots}{\omega} = \frac{\omega}{y}$

δ) $\frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = 1$

ε) $\frac{x+2}{x-1} : \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = 1$

στ) $\frac{x}{y} : \frac{x+2}{\dots\dots\dots} = \frac{x}{x+2}$

1 1 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{y}$

~~β) $\frac{9x}{4y} \cdot \frac{1}{3x}$~~

γ) $12x^2 \cdot \frac{1}{9x}$

~~δ) $\frac{2a^3}{3\beta^2} \cdot \frac{6\beta}{4a^2}$~~

~~ε) $(-5\omega^2) \cdot \frac{3}{10\omega}$~~

στ) $\left(-\frac{3\alpha\beta}{2\beta}\right) \cdot \left(-\frac{4}{\alpha^2}\right)$

2 Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) $8x : \frac{6}{x}$

~~β) $\frac{1}{y^2} : \left(-\frac{3}{y}\right)$~~

γ) $\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^3}\right) : 3\alpha^2$

~~δ) $\left(-\frac{x^3}{2\omega}\right) : \left(-\frac{x^2}{4\omega^2}\right)$~~

3 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

~~α)~~ $\frac{2x+6}{x^2} \cdot \frac{4x}{x+3}$

~~β)~~ $\frac{y-5}{y+2} \cdot \frac{2+y}{5-y}$

~~γ)~~ $\frac{x-\omega}{x^2\omega^3} \cdot \frac{x^3\omega^2}{x^2-\omega^2}$

~~δ)~~ $\frac{a^2-4}{a^2+a-6} \cdot \frac{a+3}{a^2+2a}$

~~ε)~~ $\frac{x^2+x}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x}$

~~σ)~~ $\frac{4y^2-9}{4y^2-12y+9} \cdot \frac{y^2+3y}{2y^2+3y}$

4 Να κάνετε τις διαιρέσεις:

~~α)~~ $\frac{x+4}{5} : \frac{x+4}{15}$

~~β)~~ $\frac{2y-1}{y+1} : \frac{1-2y}{1+y}$

~~γ)~~ $\left(-\frac{\omega+2}{\omega}\right) : (\omega+2)$

~~δ)~~ $\frac{a+1}{\beta^2} : \frac{(a+1)^2}{\beta}$

~~ε)~~ $\frac{x+y}{x^2-xy} : \frac{x^2+xy}{x-y}$

~~σ)~~ $\frac{x^2-4}{x^3+8} : \frac{x-2}{x^2-2x+4}$

► Πρόσθεση / αφαίρεση κλάσων αλγεβρικών παραστάσεων

$$\cdot \quad \frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{9}{5}$$

$$\cdot \quad \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\cdot \quad \frac{\overset{(3)}{2}}{5} + \frac{\overset{(5)}{4}}{3} = \frac{6}{15} + \frac{20}{15}$$

$$\cdot \quad \frac{\overset{(3)}{5}}{4} + \frac{\overset{(2)}{7}}{6} = \frac{15}{12} + \frac{14}{12} = \frac{29}{12}$$

$$\cdot \quad \frac{\overset{(x^2)}{5}}{x} + \frac{\overset{(1)}{6}}{x^3} = \frac{5x^2}{x^3} + \frac{6}{x^3} = \frac{5x^2 + 6}{x^3}$$

$$\text{ΕΚΠ} (x, x^3) = x^3$$

$$\cdot \quad \frac{x+2}{xy^2} - \frac{y+2}{x^2y}$$

$$\text{ΕΚΠ} (xy^2, x^2y) = x^2y^2$$

$$\frac{\overset{(x)}{x+2}}{xy^2} - \frac{\overset{(y)}{y+2}}{x^2y} =$$

$$= \frac{x \cdot (x+2)}{x^2y^2} - \frac{y \cdot (y+2)}{x^2y^2} =$$

$$= \frac{x(x+2) - y(y+2)}{x^2y^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - y^2 - 2y}{x^2y^2}$$

1

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

~~α)~~ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

β) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x}$

γ) $\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}$

δ) $\frac{1}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2 + 1}$

$$1) \quad a) \quad \frac{\overset{y}{1}}{x} + \frac{\overset{x}{1}}{y} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{y+x}{xy}$$

$$\varepsilon_{kT} (x, y) = x \cdot y$$

$$b) \quad \frac{\overset{x}{3}}{x+1} - \frac{\overset{x+1}{2}}{x} = \frac{3x}{(x+1) \cdot x} - \frac{2 \cdot (x+1)}{x \cdot (x+1)} = \frac{3x - 2(x+1)}{x(x+1)} =$$

$$\varepsilon_{kT} (x+1, x) = (x+1) \cdot x = \frac{3x - 2x - 2}{x(x+1)} = \frac{x-2}{x(x+1)}$$

1

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

β) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x}$

γ) $\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}$

δ) $\frac{1}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2+1}$

$$\gamma) \quad \frac{\overset{1}{\cancel{1}}}{y^2} - \frac{\overset{y}{\cancel{y}}}{y} = \frac{1}{y^2} - \frac{y}{y^2} = \frac{1-y}{y^2}$$

$$\text{ΕΚΠ}(\gamma^2, y) = y^2$$

$$\delta) \quad \frac{\overset{\omega^2+1}{\cancel{1}}}{\omega^2} - \frac{\overset{\omega^2}{\cancel{2}}}{\omega^2+1} = \frac{\omega^2+1}{\omega^2 \cdot (\omega^2+1)} - \frac{2\omega^2}{\omega^2 \cdot (\omega^2+1)} = \frac{\omega^2+1-2\omega^2}{\omega^2 \cdot (\omega^2+1)}$$

$$\text{ΕΚΠ}(\omega^2, \omega^2+1) = \omega^2 \cdot (\omega^2+1) \quad = \frac{1-\omega^2}{\omega^2 \cdot (\omega^2+1)}$$

2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{2x}{2x-6} - \frac{3}{x-3}$

β) $\frac{y-6}{y^2+2y} - \frac{4}{y+2}$

γ) $\frac{3\omega+6}{\omega^2-4} - \frac{4}{2\omega-4}$

δ) $\frac{1}{2x+12} + \frac{x}{36-x^2}$

ε) $\frac{9x}{x^2-x\omega} + \frac{3\omega}{\omega^2-x\omega}$

στ) $\frac{a+7}{a^2+4a+3} - \frac{3}{a+1}$

$$\alpha) \quad \frac{2x}{2x-6} - \frac{3}{x-3} = \frac{\overset{1}{2x}}{2(x-3)} - \frac{\overset{2}{3}}{x-3} = \frac{2x}{2(x-3)} - \frac{6}{2(x-3)} =$$

$$\text{Εκπ} (2(x-3), (x-3)) = 2(x-3) = \frac{2x-6}{2(x-3)} = \frac{2(x-3)}{2(x-3)} = 1$$

$$\beta) \quad \frac{y-6}{y^2+2y} - \frac{4}{y+2} = \frac{\overset{1}{y-6}}{y(y+2)} - \frac{\overset{y}{4}}{y+2} = \frac{y-6}{y(y+2)} - \frac{4y}{y(y+2)} =$$

$$\text{Εκπ} (y(y+2), y+2) = y(y+2) = \frac{y-6-4y}{y(y+2)} = \frac{-3y-6}{y(y+2)} = \frac{-3(y+2)}{y(y+2)} = -\frac{3}{y}$$

2 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{2x}{2x-6} - \frac{3}{x-3}$$

$$\beta) \frac{y-6}{y^2+2y} - \frac{4}{y+2}$$

$$\gamma) \frac{3\omega+6}{\omega^2-4} - \frac{4}{2\omega-4}$$

$$\delta) \frac{1}{2x+12} + \frac{x}{36-x^2}$$

$$\epsilon) \frac{9x}{x^2-x\omega} + \frac{3\omega}{\omega^2-x\omega}$$

$$\sigma) \frac{a+7}{a^2+4a+3} - \frac{3}{a+1}$$

$$\gamma) \frac{3\omega+6}{\omega^2-4} - \frac{4}{2\omega-4} = \frac{3\omega+6}{(\omega+2)(\omega-2)} - \frac{4}{2(\omega-2)} =$$

$$\text{ΕΚΠ} ((\omega+2)(\omega-2), 2(\omega-2)) = (\omega-2)(\omega+2)2$$

$$= \frac{6\omega+12}{2(\omega+2)(\omega-2)} - \frac{4(\omega+2)}{2(\omega+2)(\omega-2)} = \frac{6\omega+12-4(\omega+2)}{2(\omega+2)(\omega-2)} = \frac{6\omega+12-4\omega-8}{2(\omega+2)(\omega-2)} =$$

$$= \frac{2\omega+4}{2(\omega+2)(\omega-2)} = \frac{\cancel{2}(\omega+2)}{\cancel{2}(\omega+2)(\omega-2)} = \frac{1}{\omega-2}$$

2 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{2x}{2x-6} - \frac{3}{x-3}$

β) $\frac{y-6}{y^2+2y} - \frac{4}{y+2}$

γ) $\frac{3\omega+6}{\omega^2-4} - \frac{4}{2\omega-4}$

δ) $\frac{1}{2x+12} + \frac{x}{36-x^2}$

ε) $\frac{9x}{x^2-x\omega} + \frac{3\omega}{\omega^2-x\omega}$

στ) $\frac{a+7}{a^2+4a+3} - \frac{3}{a+1}$

δ) $\frac{1}{2x+12} + \frac{x}{36-x^2} = \frac{\overset{6-x}{1}}{2(x+6)} + \frac{\overset{2}{x}}{(6-x)(6+x)} =$

Εκπ = $2(x+6)(6-x)$

$= \frac{6-x}{2(x+6)(6-x)} + \frac{2x}{2(6-x)(6+x)} = \frac{\cancel{6+x}}{2(\cancel{x+6})(6-x)} =$
 $= \frac{1}{2(6-x)}$

2 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{2x}{2x-6} - \frac{3}{x-3}$

β) $\frac{y-6}{y^2+2y} - \frac{4}{y+2}$

γ) $\frac{3\omega+6}{\omega^2-4} - \frac{4}{2\omega-4}$

δ) $\frac{1}{2x+12} + \frac{x}{36-x^2}$

ε) $\frac{9x}{x^2-x\omega} + \frac{3\omega}{\omega^2-x\omega}$

στ) $\frac{a+7}{a^2+4a+3} - \frac{3}{a+1}$

⚠ ε)
$$\frac{9x}{x^2-x\omega} + \frac{3\omega}{\omega^2-x\omega} = \frac{9x}{x(x-\omega)} + \frac{3\omega}{\omega(\omega-x)} =$$
$$= \frac{\overbrace{9x}^{\omega}}{x(x-\omega)} - \frac{\overbrace{3\omega}^x}{\omega(x-\omega)} = \frac{9x\omega}{x\omega(x-\omega)} - \frac{3x\omega}{x\omega(x-\omega)} = \frac{6x\omega}{x\omega(x-\omega)} =$$

Εκκλ = $(x-\omega) \cdot x \cdot \omega = \frac{6}{x-\omega}$

2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{2x}{2x-6} - \frac{3}{x-3}$

β) $\frac{y-6}{y^2+2y} - \frac{4}{y+2}$

γ) $\frac{3\omega+6}{\omega^2-4} - \frac{4}{2\omega-4}$

δ) $\frac{1}{2x+12} + \frac{x}{36-x^2}$

ε) $\frac{9x}{x^2-x\omega} + \frac{3\omega}{\omega^2-x\omega}$

στ) $\frac{a+7}{a^2+4a+3} - \frac{3}{a+1}$

$$\alpha) \quad \frac{a+7}{a^2+4a+3} - \frac{3}{a+1} = \frac{a+7}{a^2+a+3a+3} - \frac{3}{a+1} =$$

$$= \frac{a+7}{a(a+1)+3(a+1)} - \frac{3}{a+1} = \frac{a+7}{(a+1)(a+3)} - \frac{3}{a+1} =$$

$$\text{Εκπ} = (a+1)(a+3) \quad = \frac{a+7}{(a+1)(a+3)} - \frac{3(a+3)}{(a+1)(a+3)} =$$

$$= \frac{a+7-3a-9}{(a+1)(a+3)} = \frac{-2a-2}{(a+1)(a+3)} = \frac{-2(a+1)}{(a+1)(a+3)} = \frac{-2}{a+3}$$

3

Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

$$* = \frac{(y^2 - 2y + 1) \cdot y}{y(y^2 - 1)} = \frac{(y-1)^2 \cdot \cancel{y}}{\cancel{y} \cdot \cancel{(y-1)}(y+1)} = \frac{y-1}{y+1}$$

$$\alpha) \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\beta) \frac{y - 2 + \frac{1}{y}}{y - \frac{1}{y}}$$

$$\gamma) \frac{\omega + 1 + \frac{1}{\omega}}{1 - \frac{1}{\omega^3}}$$

$$\delta) \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}$$

$$\alpha) \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x}{1} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x + 1}{x}} =$$

$$= \frac{(x^2 - 1) \cdot x}{x(x + 1)} = \frac{(x-1)(\cancel{x+1})x}{\cancel{x}(x+1)} = x - 1$$

$$\beta) \frac{y - 2 + \frac{1}{y}}{y - \frac{1}{y}} = \frac{\frac{y}{1} - \frac{2}{1} + \frac{1}{y}}{\frac{y}{1} - \frac{1}{y}} = \frac{\frac{y^2}{y} - \frac{2y}{y} + \frac{1}{y}}{\frac{y^2}{y} - \frac{1}{y}} = \frac{\frac{y^2 - 2y + 1}{y}}{\frac{y^2 - 1}{y}} = x$$

3

Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

~~α) $\frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$~~

~~β) $\frac{y - 2 + \frac{1}{y}}{y - \frac{1}{y}}$~~

~~γ) $\frac{\omega + 1 + \frac{1}{\omega}}{1 - \frac{1}{\omega^3}}$~~

~~δ) $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}$~~

$$\begin{aligned}
 \delta) \quad & \frac{\frac{\overbrace{1}^b}{a} - \frac{\overbrace{1}^a}{b}}{\frac{\overbrace{b}^b}{a} - \frac{\overbrace{a}^a}{b}} = \frac{\frac{b}{ab} - \frac{a}{ab}}{\frac{b^2}{ab} - \frac{a^2}{ab}} = \frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{b^2-a^2}{ab}} = \\
 & = \frac{(b-a) \cdot ab}{(b^2-a^2)ab} = \frac{\cancel{(b-a)} \cancel{ab}}{\cancel{(b-a)}(b+a) \cdot \cancel{ab}} = \frac{1}{b+a} .
 \end{aligned}$$

4

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$= \frac{x+2}{x}$$

$$\alpha) \frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x}$$

$$\beta) \frac{3}{x+2y} - \frac{2}{x-2y} + \frac{2x+16y}{x^2-4y^2}$$

$$\gamma) \frac{y^2-6}{y^2-5y+6} - \frac{2}{y-2} + \frac{3}{y-3}$$

$$\delta) \frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{x+y} - \frac{2xy^2}{x^2-y^2}$$

$$\alpha) \frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = \frac{\overbrace{x-2}}{x} + \frac{\overbrace{4}}{x-2} - \frac{\overbrace{8}}{x(x-2)} =$$

$$\text{Εύρη} = x(x-2)$$

$$= \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} + \frac{4x}{x(x-2)} - \frac{8}{x(x-2)} =$$

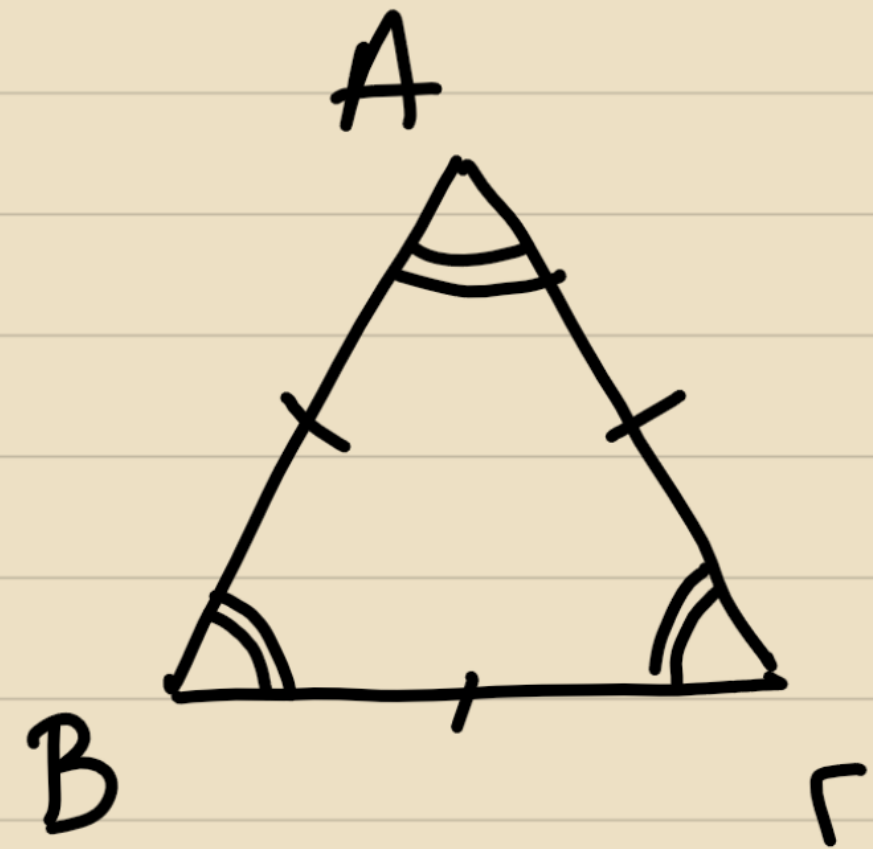
$$= \frac{(x-2)^2 + 4x - 8}{x(x-2)} = \frac{x^2 - 4x + 4 + 4x - 8}{x(x-2)} = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} =$$

§ Γεωμετρία

- Είναι τριγωνάκια με 3 πλευρές

1) Ισοπλευρό

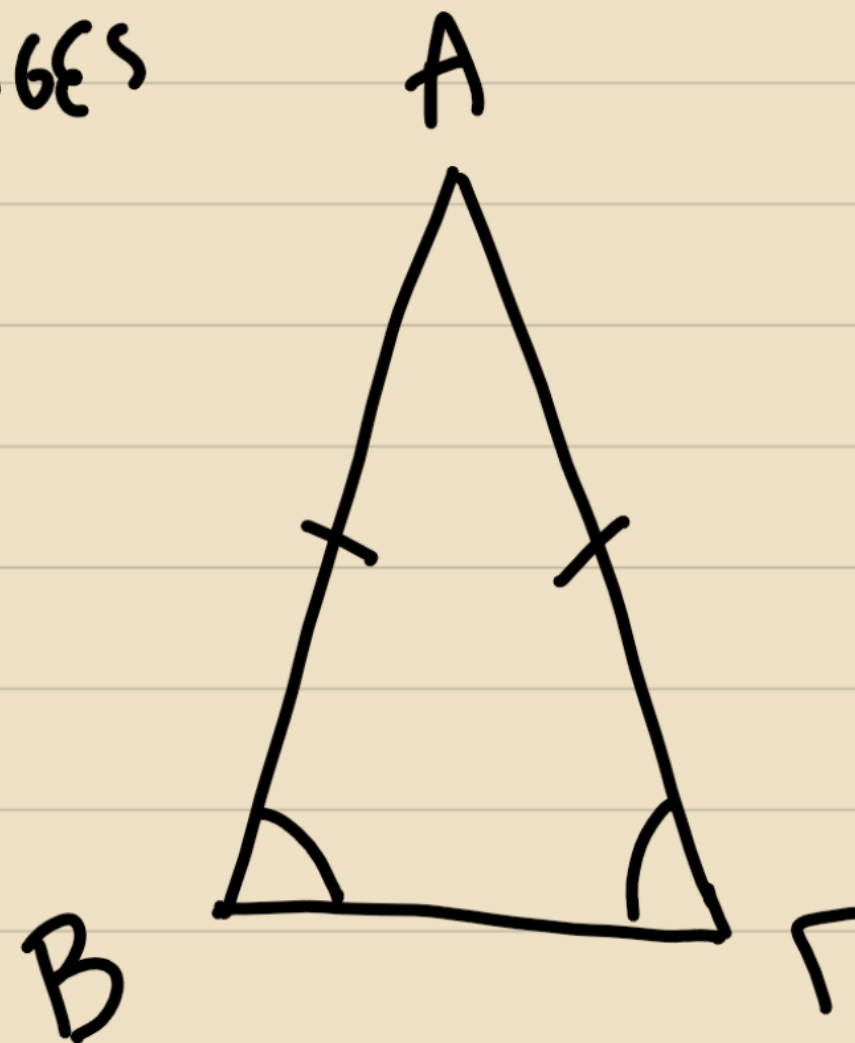
Όλες οι πλευρές & γωνίες ίσες



$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$$

2) Ισοσκελές

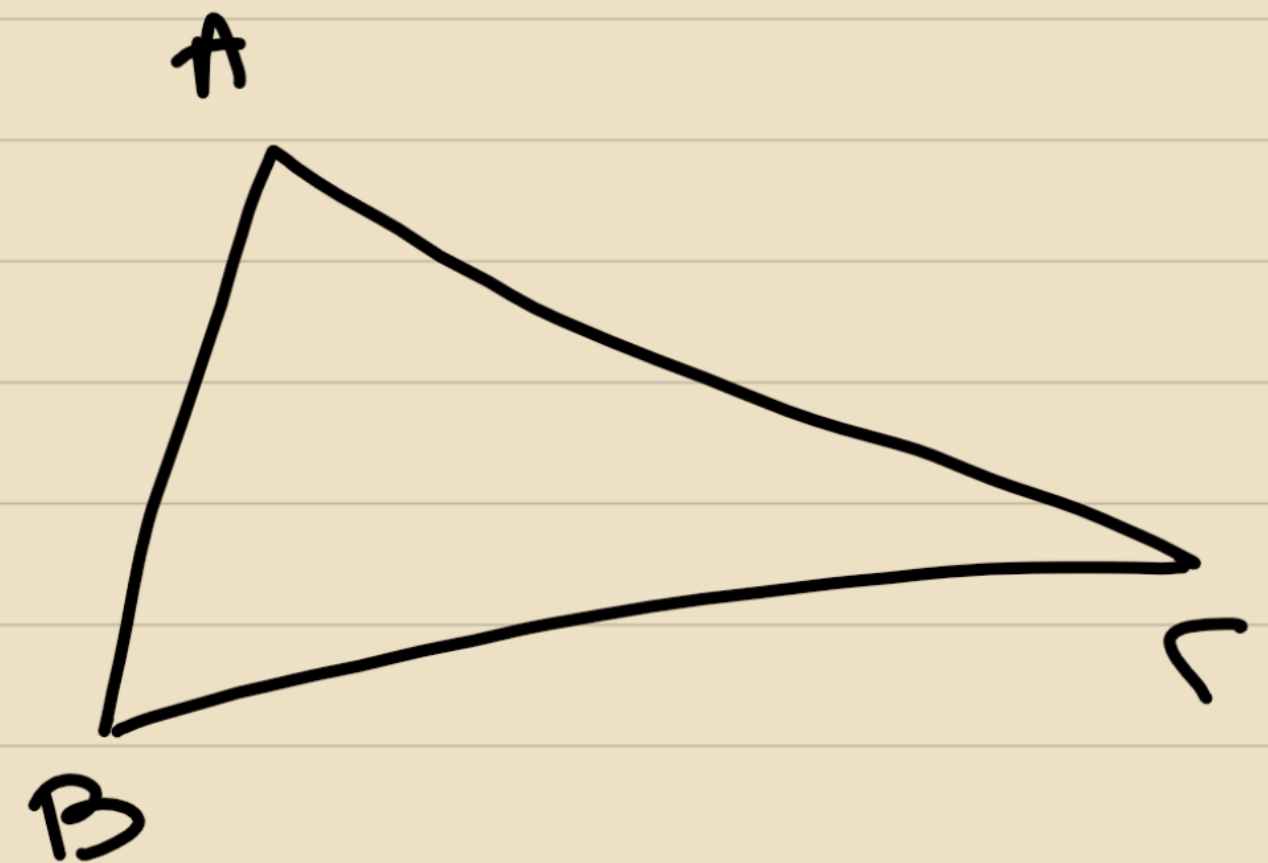
Έχει δύο των πλευρών ίσες



$$\hat{B} = \hat{\Gamma} \quad \left(\begin{array}{l} \text{1ος κανόνας} \\ \text{γωνιών} \end{array} \right)$$

3) Σκαληνό

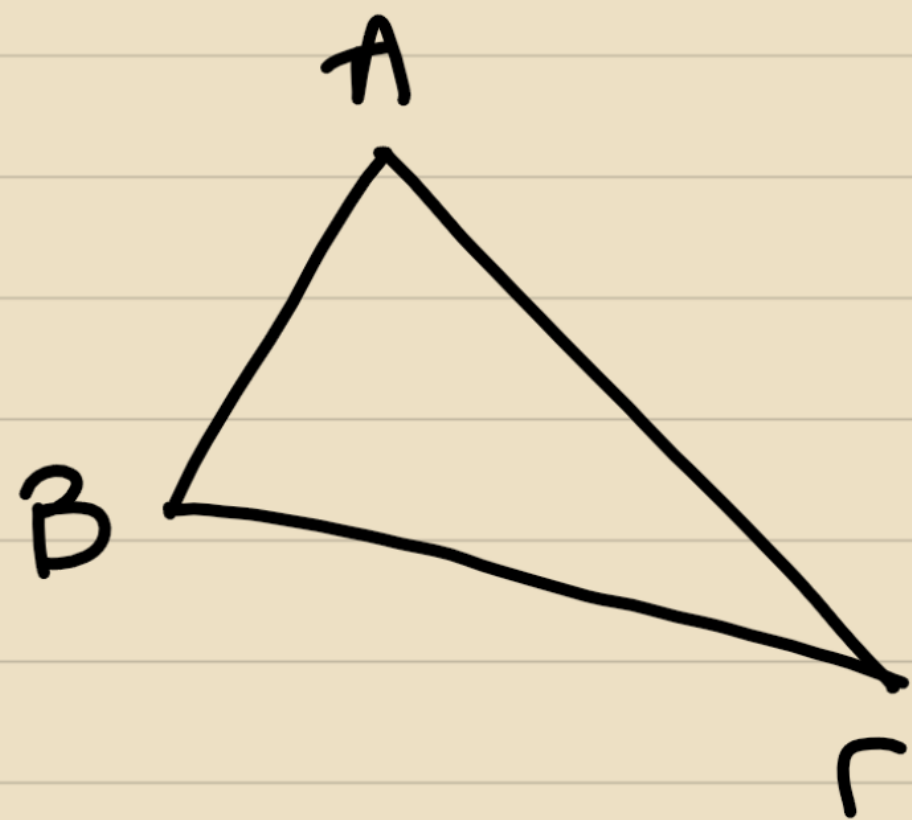
Δεν έχει τίποτα ίσο



- Είδη τριγώνων $\Rightarrow$ πώς να τα γινίε

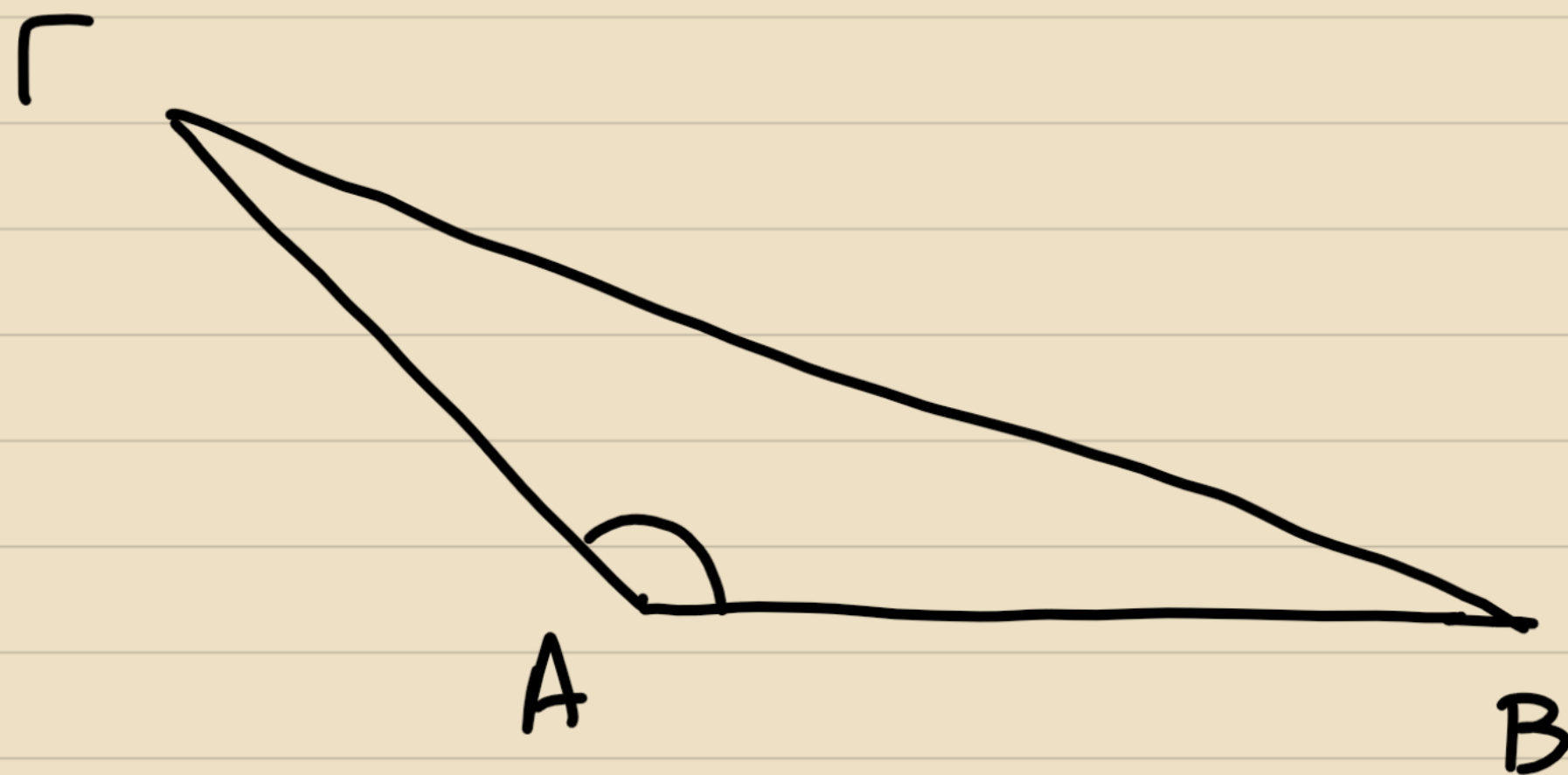
1) Οξυγώνιο

Όλες οι γωνίες είναι οξείες



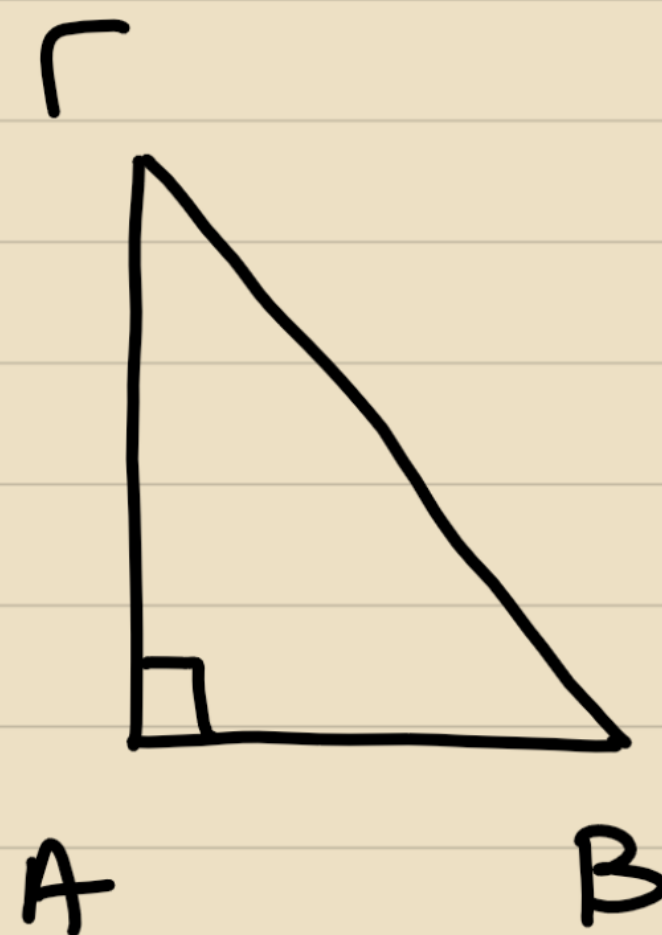
2) Αμβλυγώνιο

Έχει μια αμβλύ γωνία



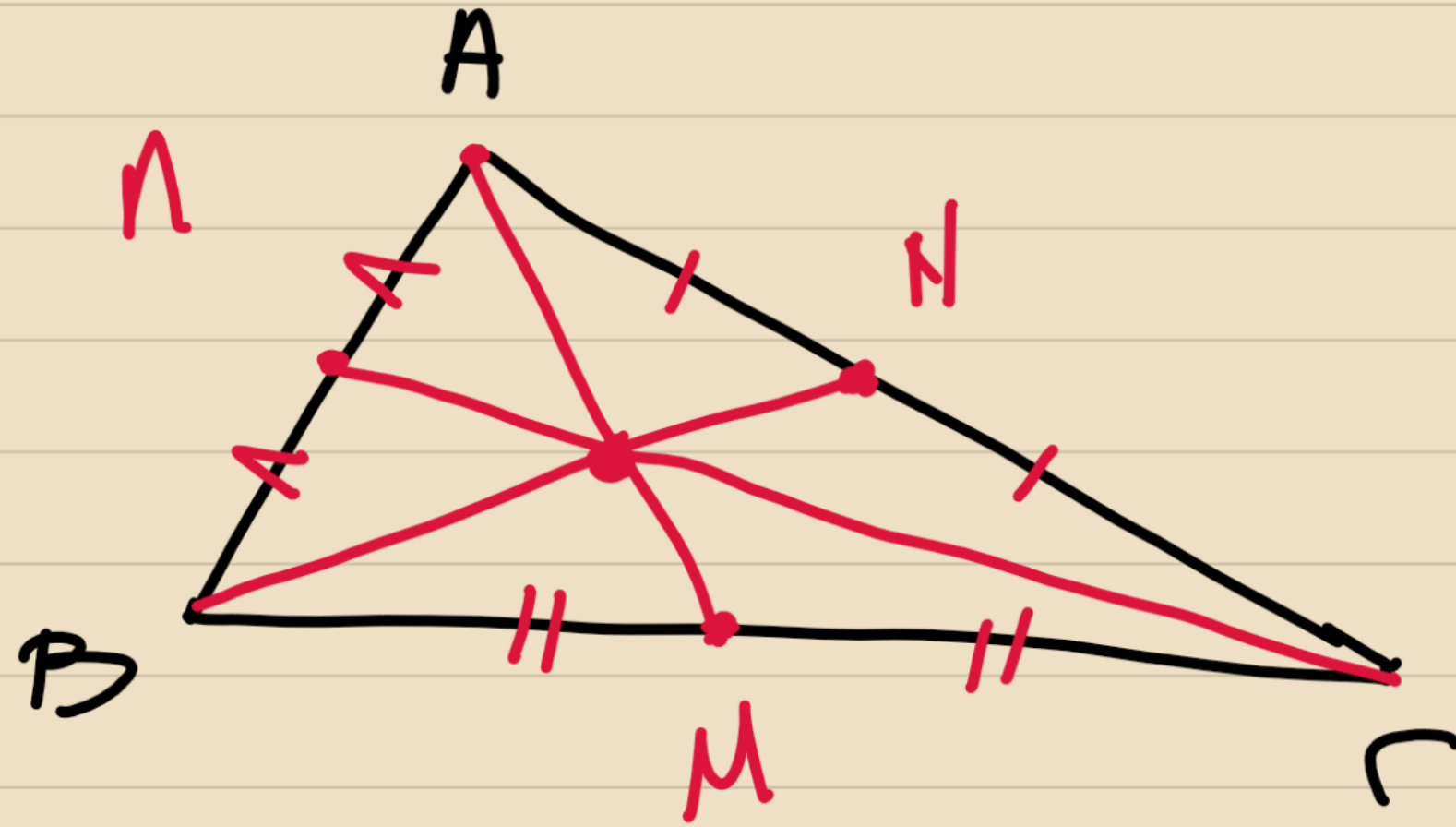
3) Ορθογώνιο

Έχει μια ορθή γωνία



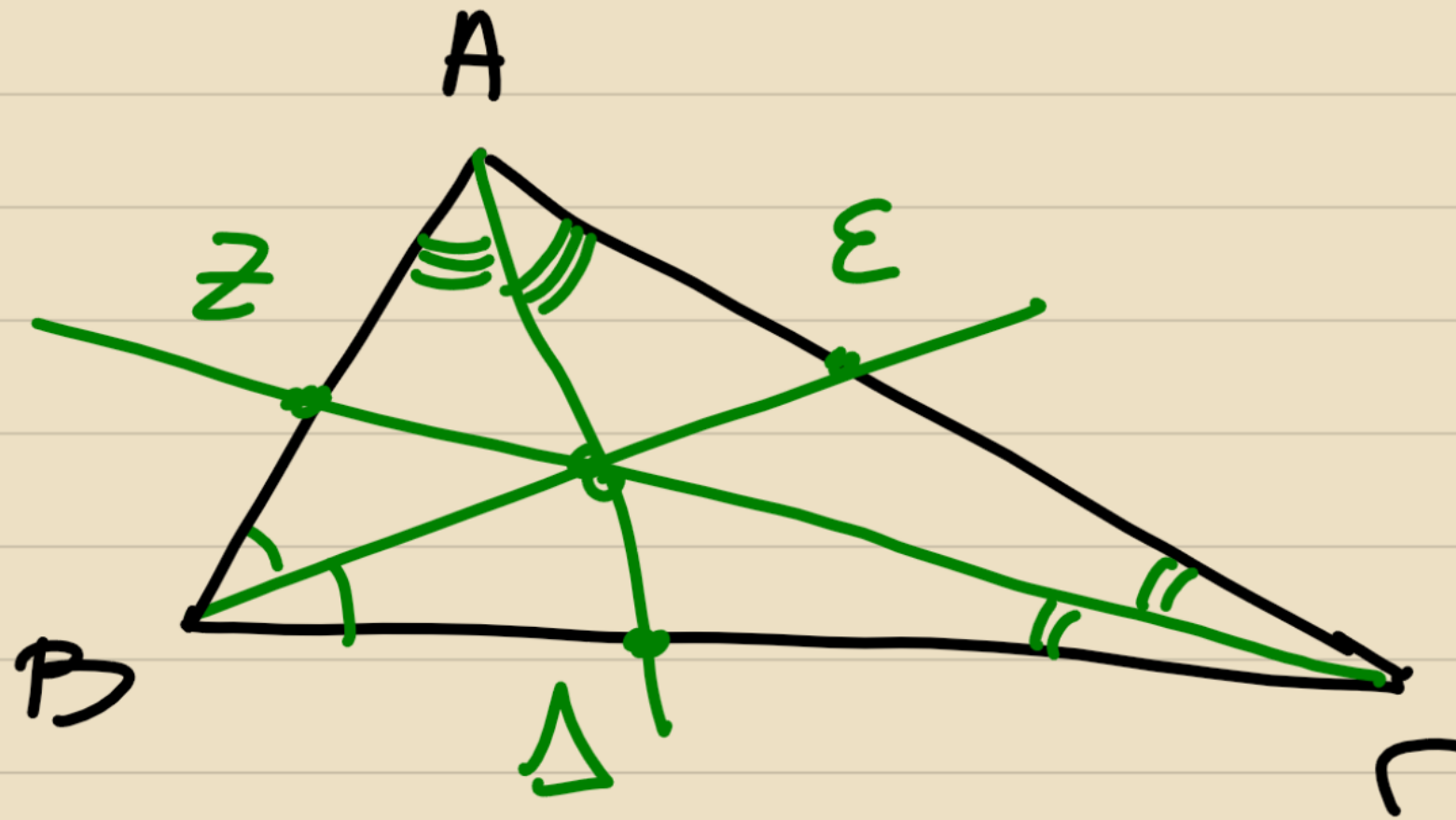
► Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνων

1) Διόμεσος



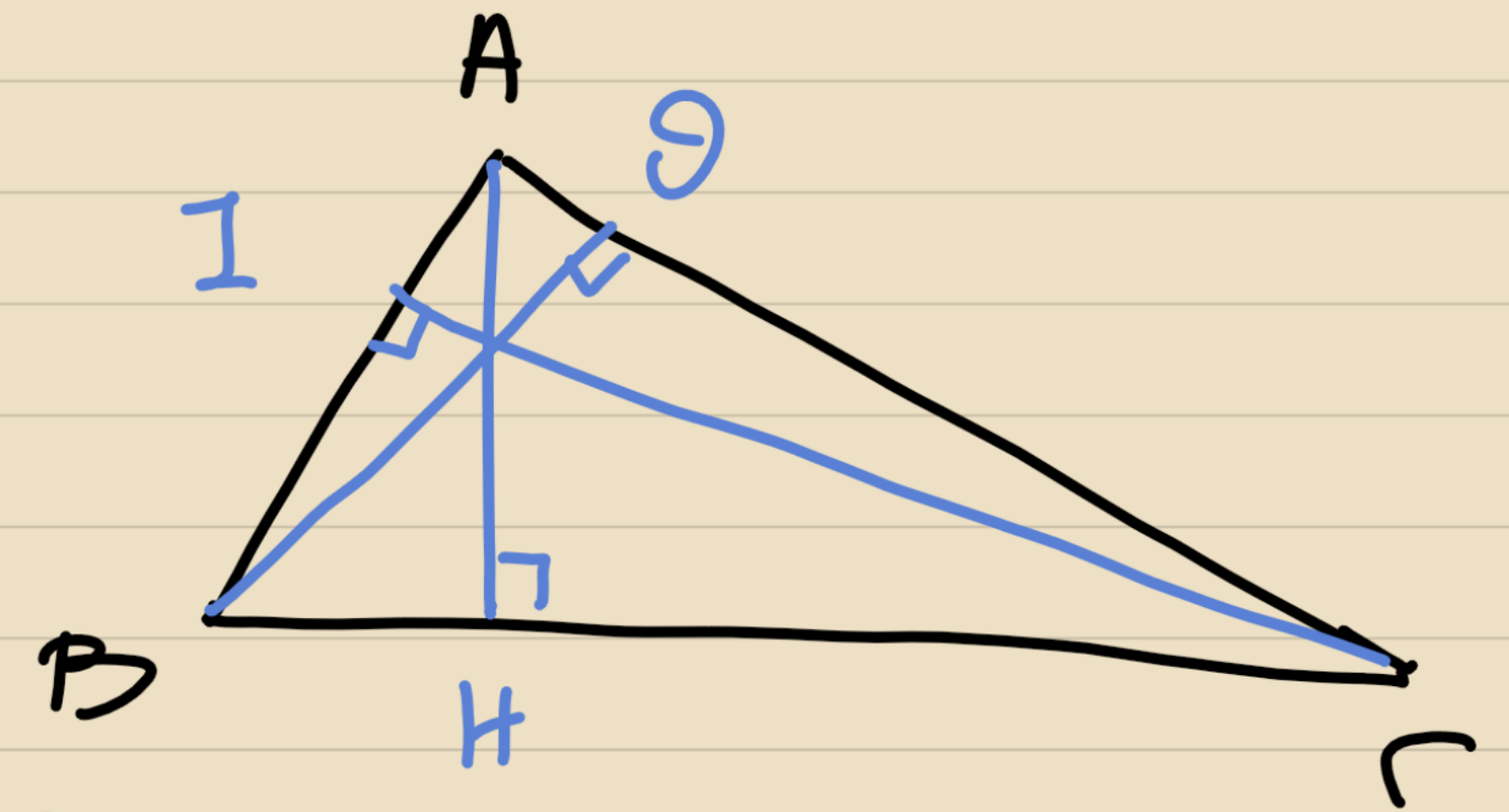
Διόμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

2) Διχοτόμος



Διχοτόμος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.

3) Ύψος

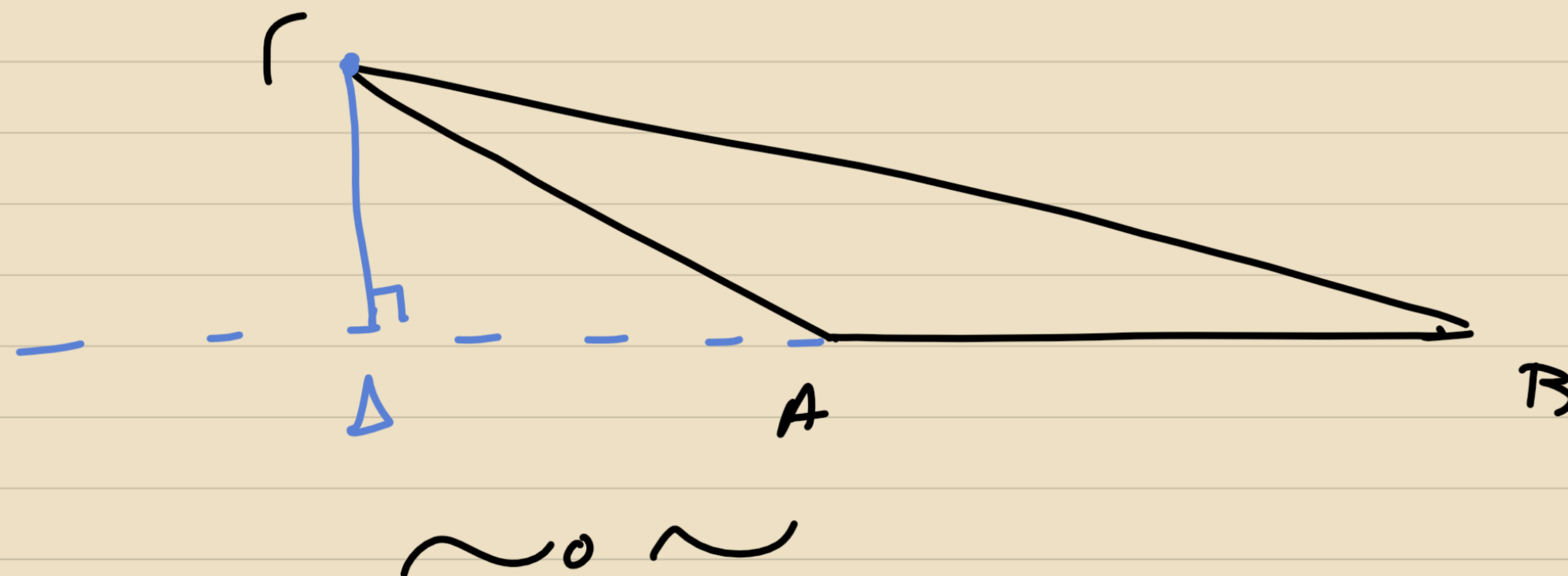


Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή και είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς.

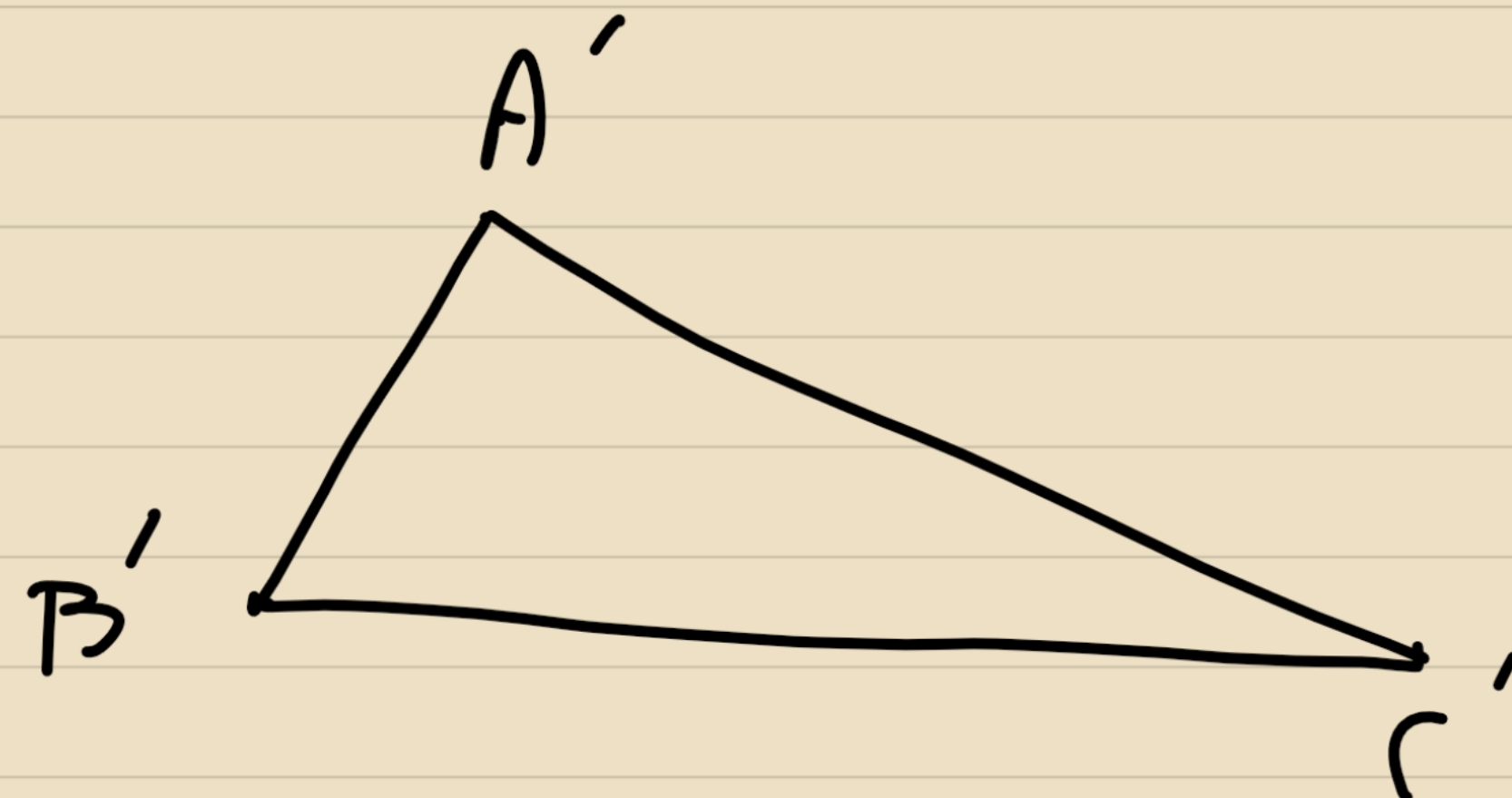
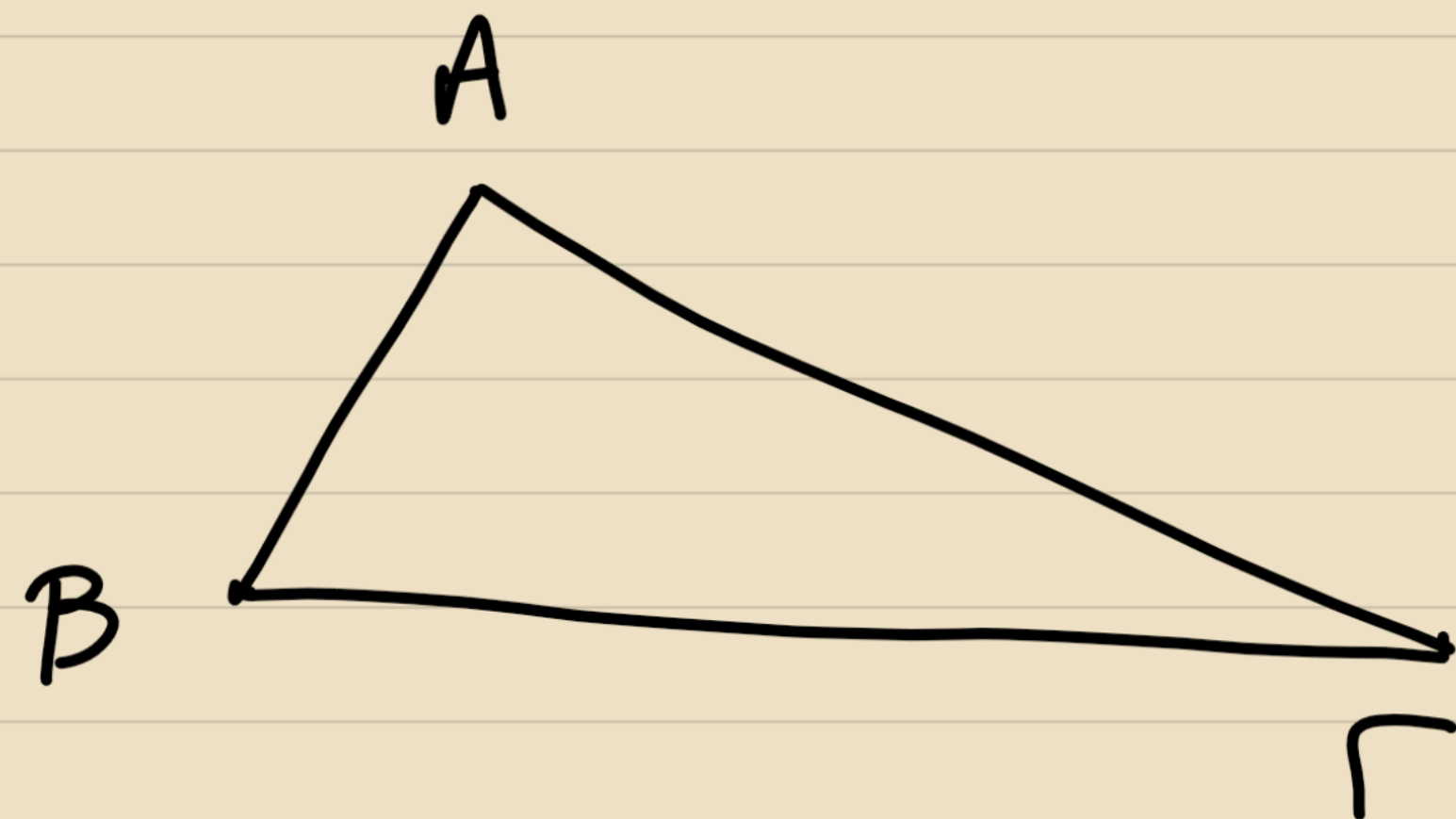
Σχολιο: Το αθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° .

• Πρόσχημα στα δευτερεύοντα στοιχεία & τα αθροίσματα

π.χ



Ισοζηνα φλγωvw



Av za φλγωvw $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}'\hat{B}'\hat{\Gamma}'$ εναν ιαν ζωξε:

$$\begin{aligned} AB &= A'B' \\ B\Gamma &= B'\Gamma' \\ A\Gamma &= A'\Gamma' \end{aligned}$$

και

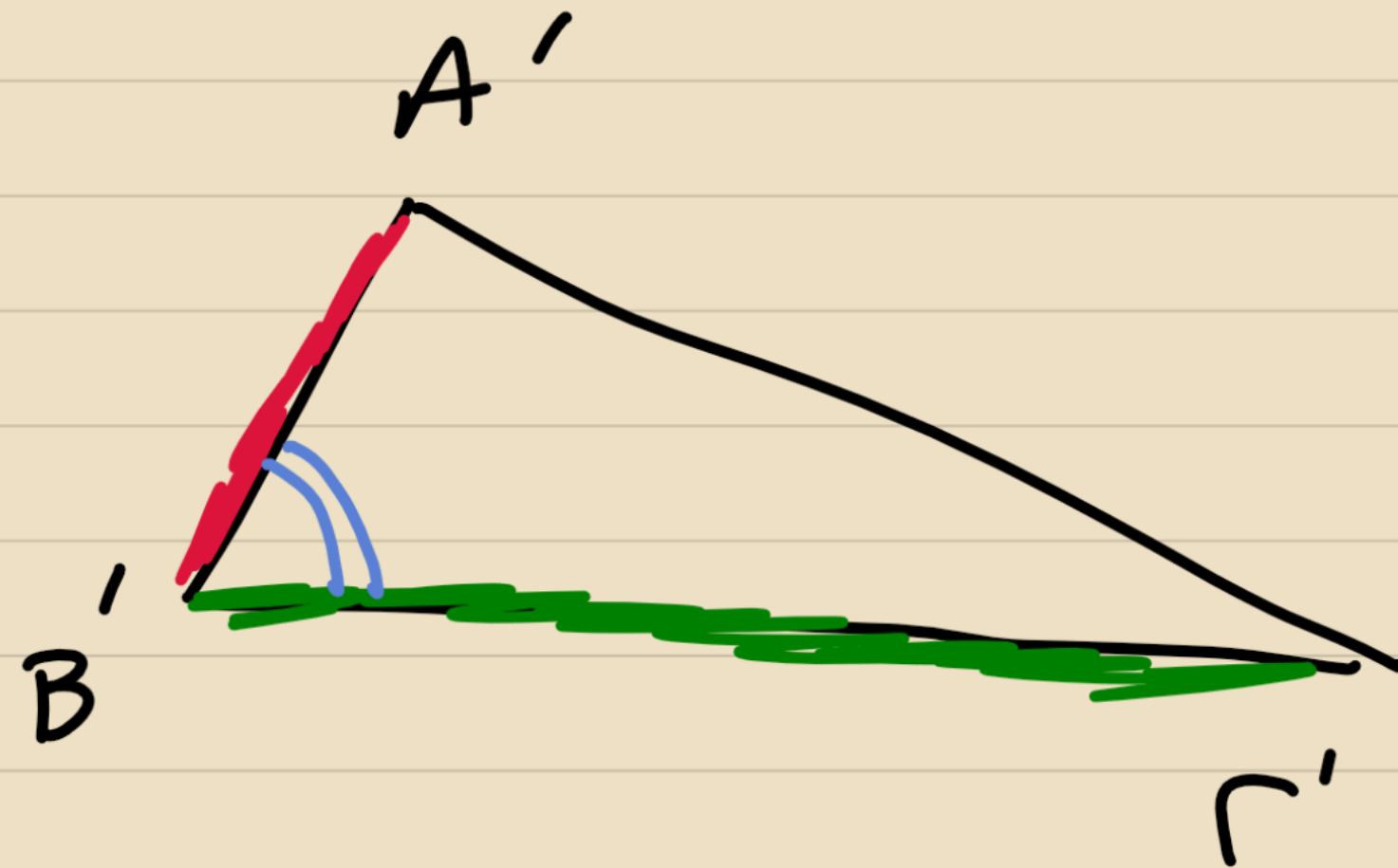
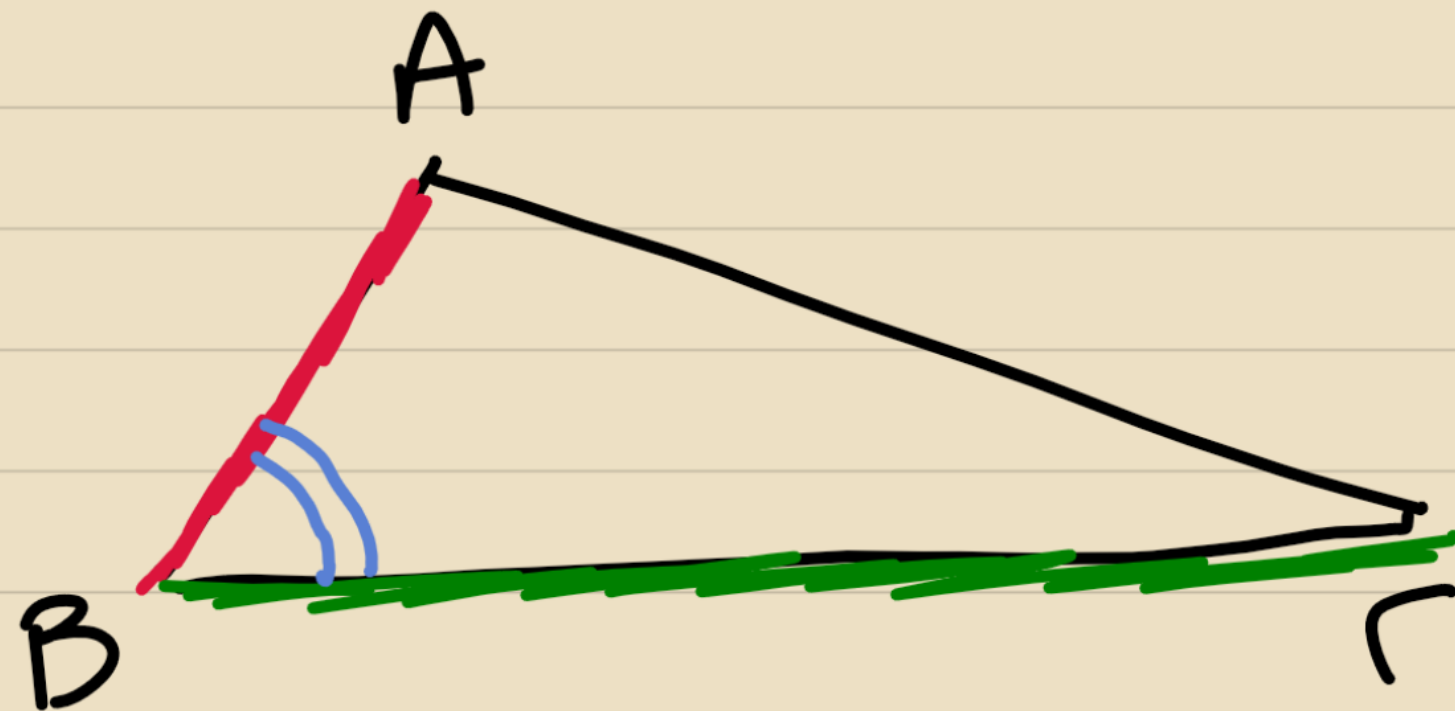
$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A}' \\ \hat{B} &= \hat{B}' \\ \hat{\Gamma} &= \hat{\Gamma}' \end{aligned}$$

Av δlv φλγωvw εxov
τω za δlvιε> τω ιε>
Iεφvza οτω ια.

1^ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων ($\Pi - \Gamma - \Pi$)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

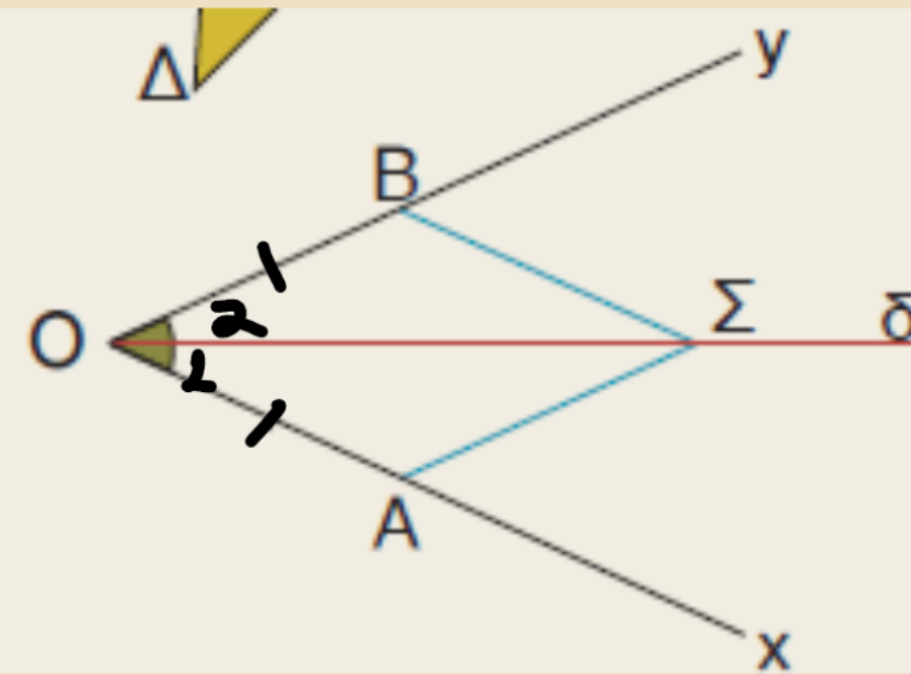
η.χ.



Σχ. Β. α 194

2

Στο διπλανό σχήμα η $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{xOy}$. Αν $OA = OB$ και Σ τυχαίο σημείο της διχοτόμου, να αποδείξετε ότι $\Sigma A = \Sigma B$.



Θα συγκρίνω τα τρίγωνα

- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
- $O\Sigma$ κοινή
- $OA = OB$

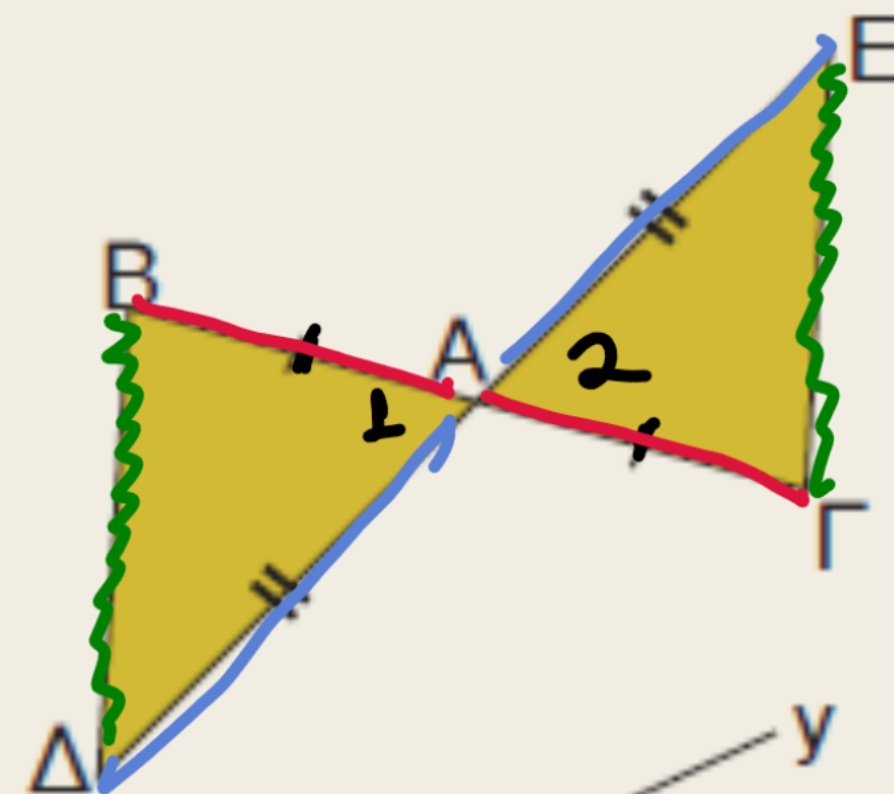
$\triangle OAS$ και $\triangle OBS$

$\Pi - \Gamma - \Pi$ ισα

και $BS = AS$

1

Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = AG$ και $AD = AE$.
Να αποδείξετε ότι $BD = GE$.



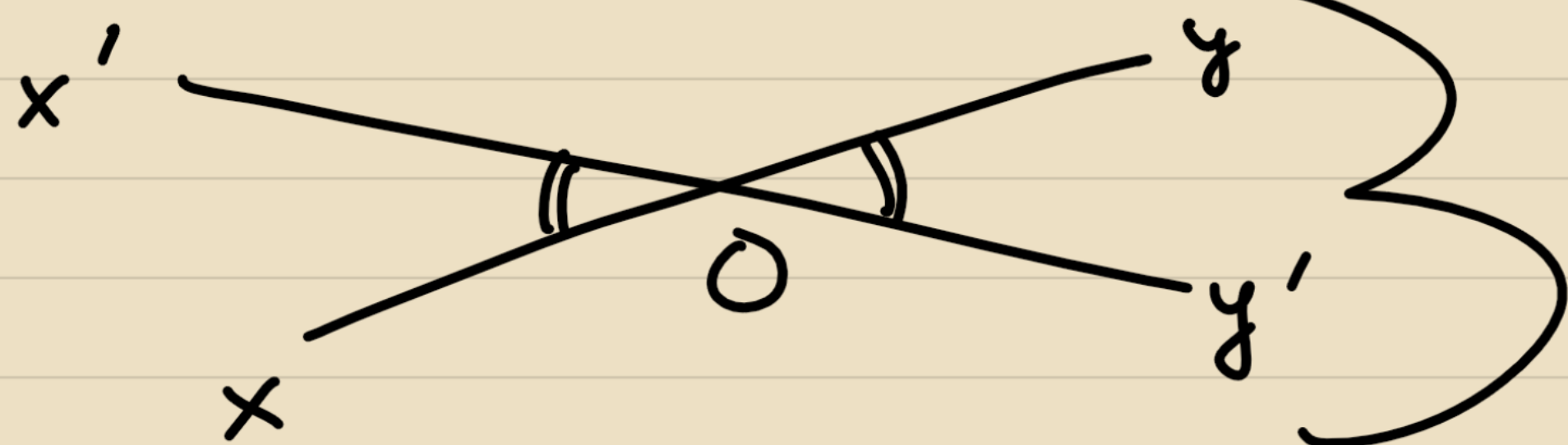
Συγκρίνω $\triangle ABD$ με $\triangle AGE$

- $BA = AG$
- $AD = AE$
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ως κατακλινείς

από Π-Γ-Π
είναι ίσα
τα τρίγωνα

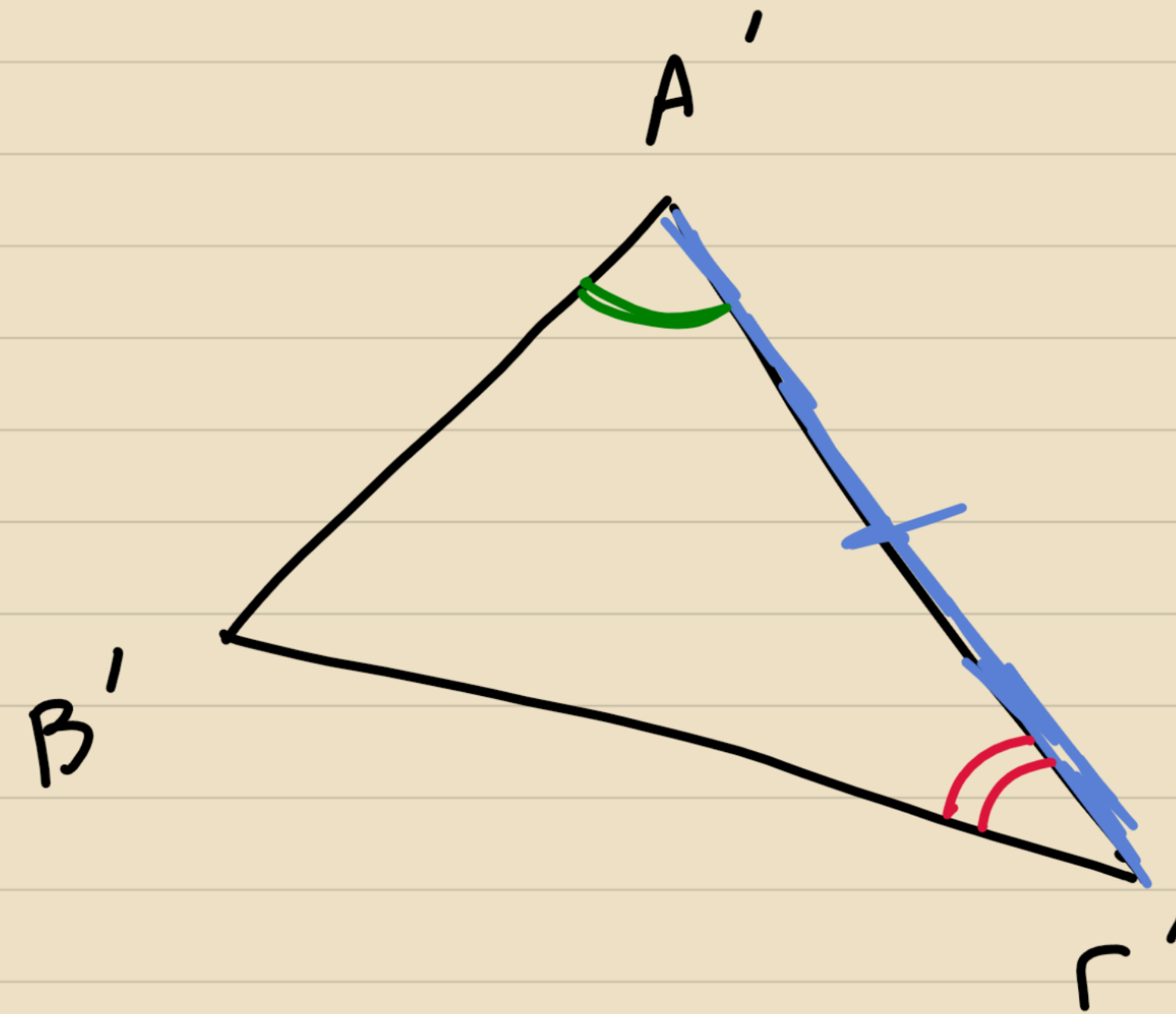
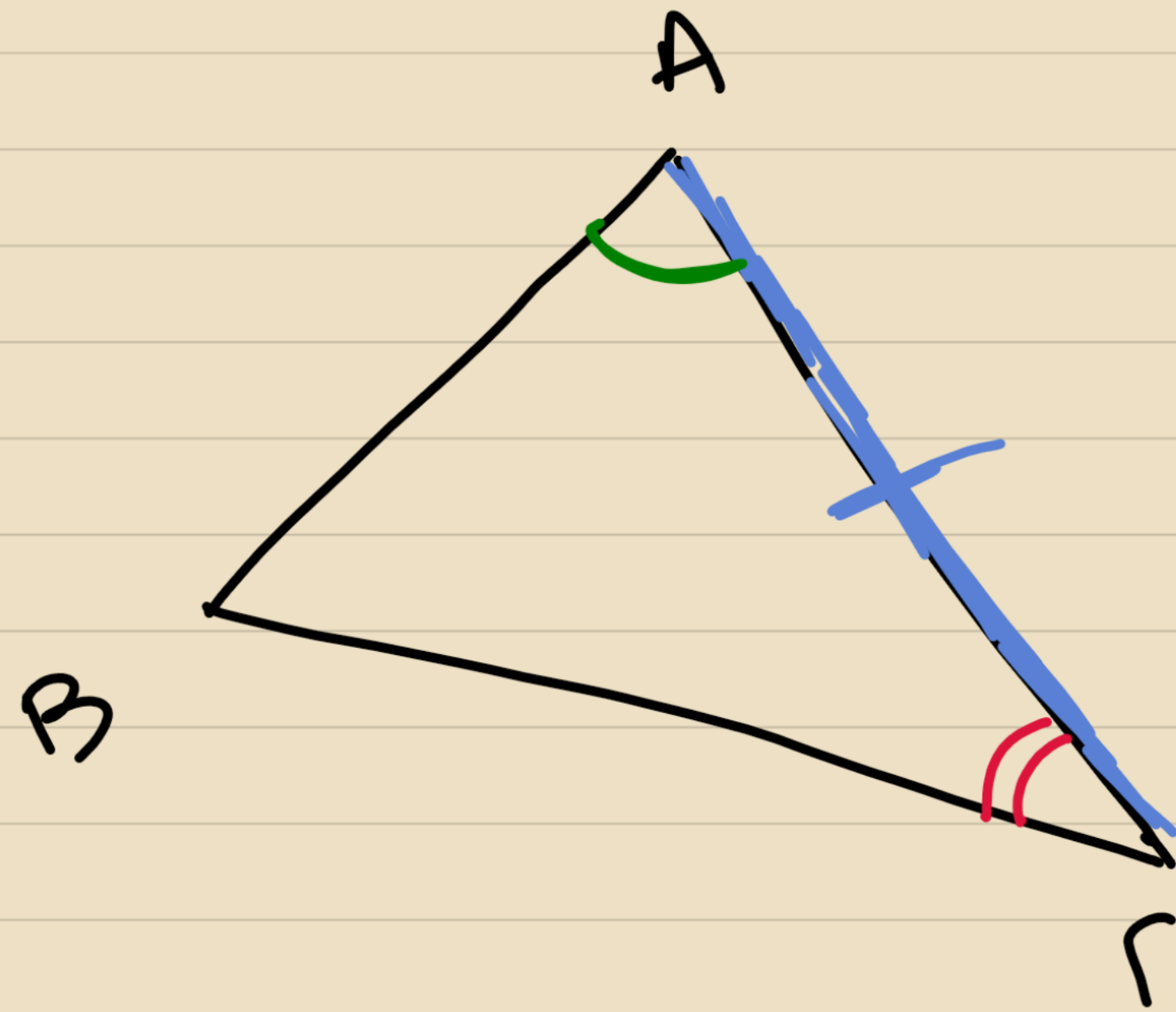
αφού $BD = EG$.

Οι κατακλινείς
είναι πάντα ίσες



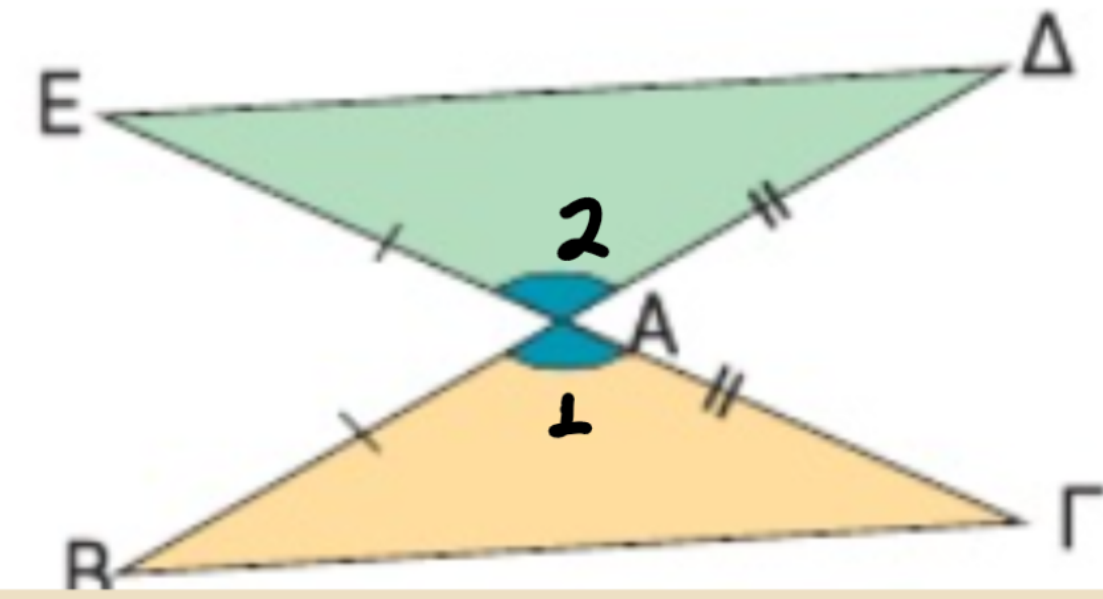
2^ο Ψηφιακό Γωτλια φιλώνω (Γ-Π-Γ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

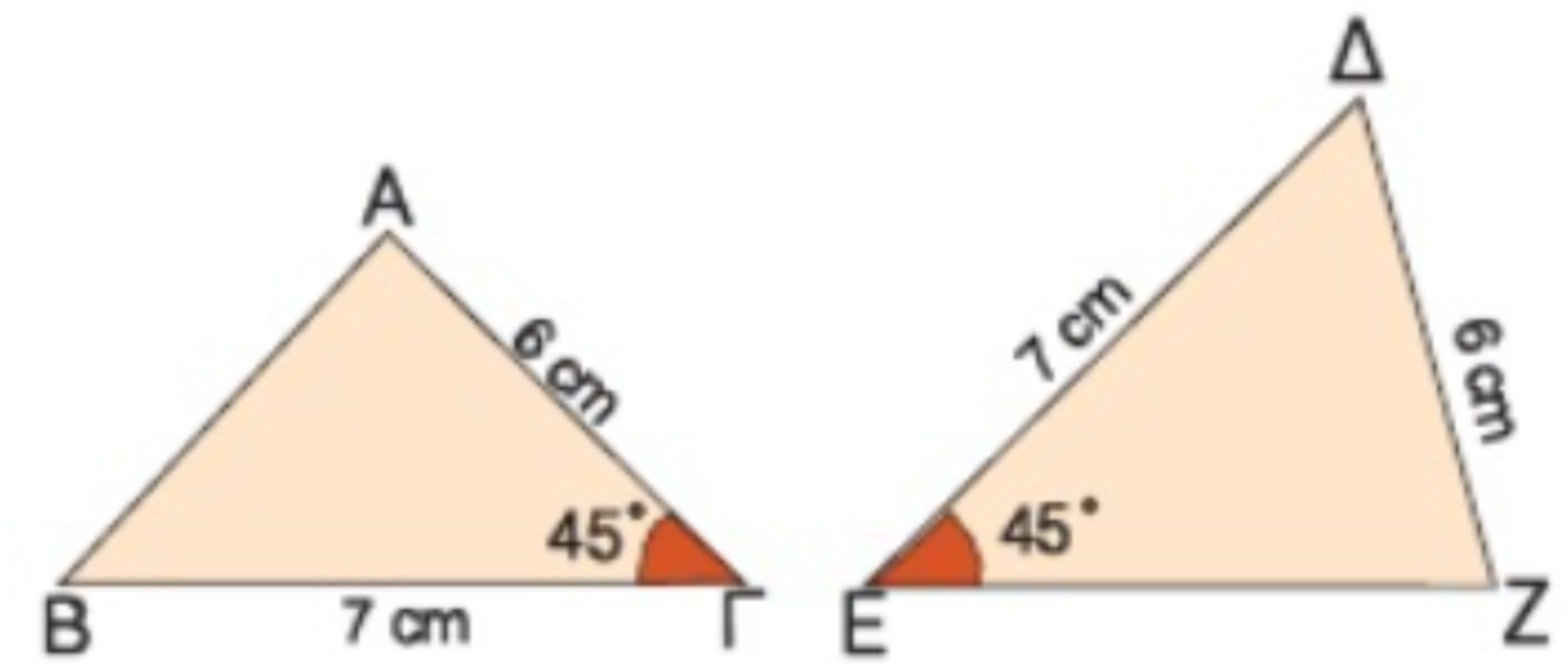


- 1 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ του παρακάτω σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες

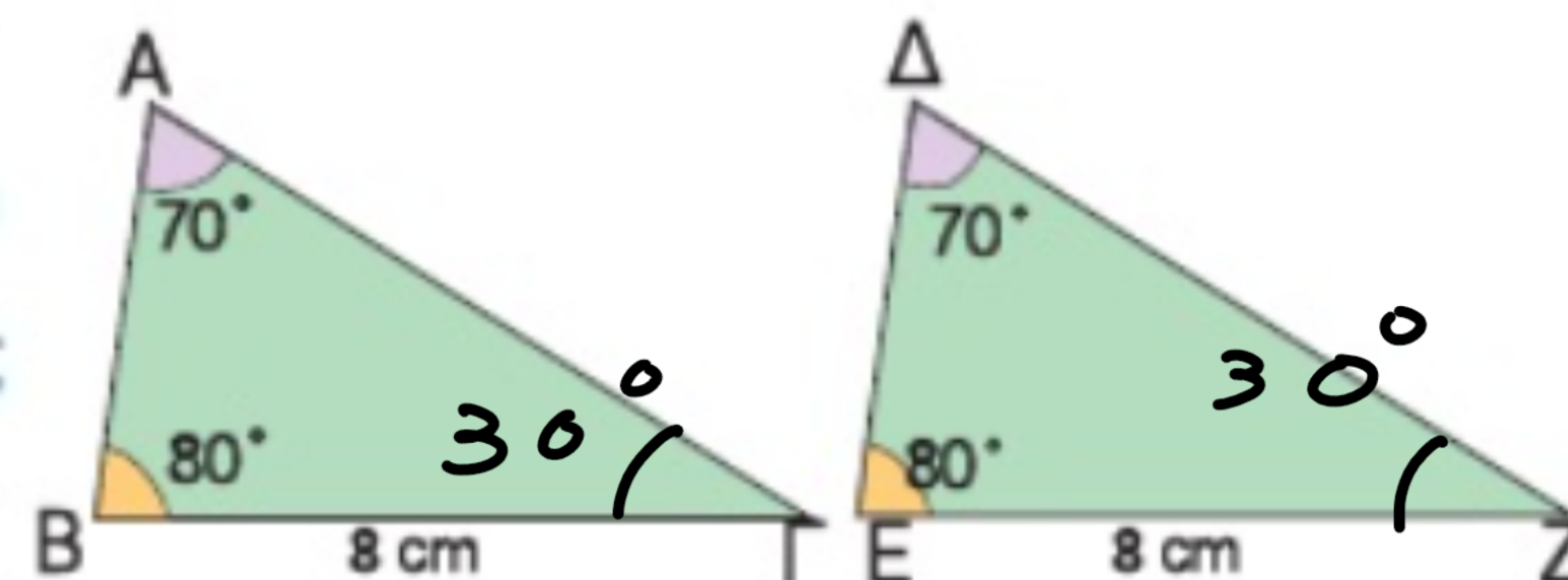
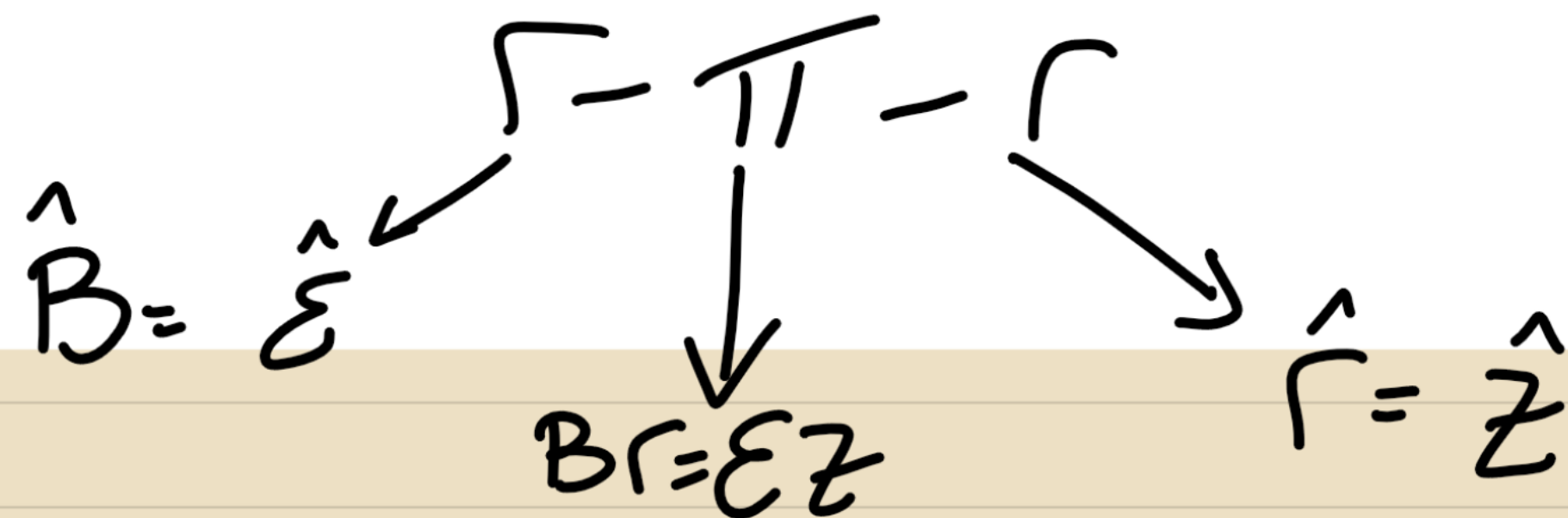
$$\hat{B} = \hat{\epsilon}, \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} \text{ και } B\Gamma = \epsilon\Delta$$



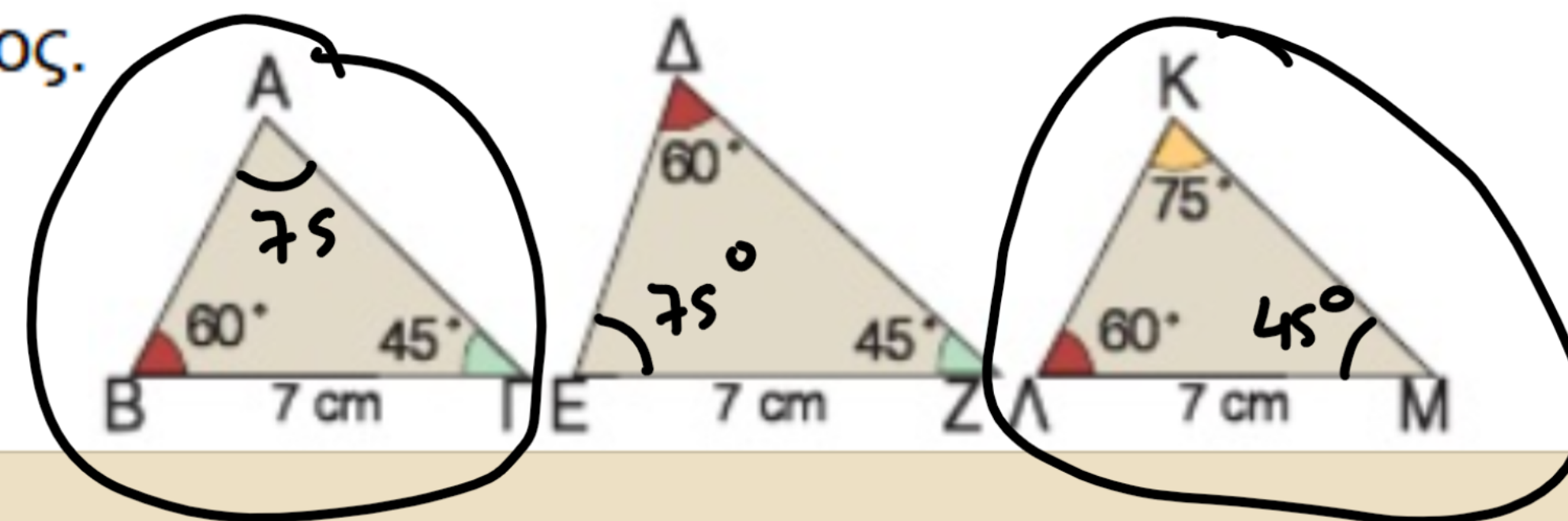
- 2 Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος, αν και έχουν δύο πλευρές ίσες και μια γωνία ίση.



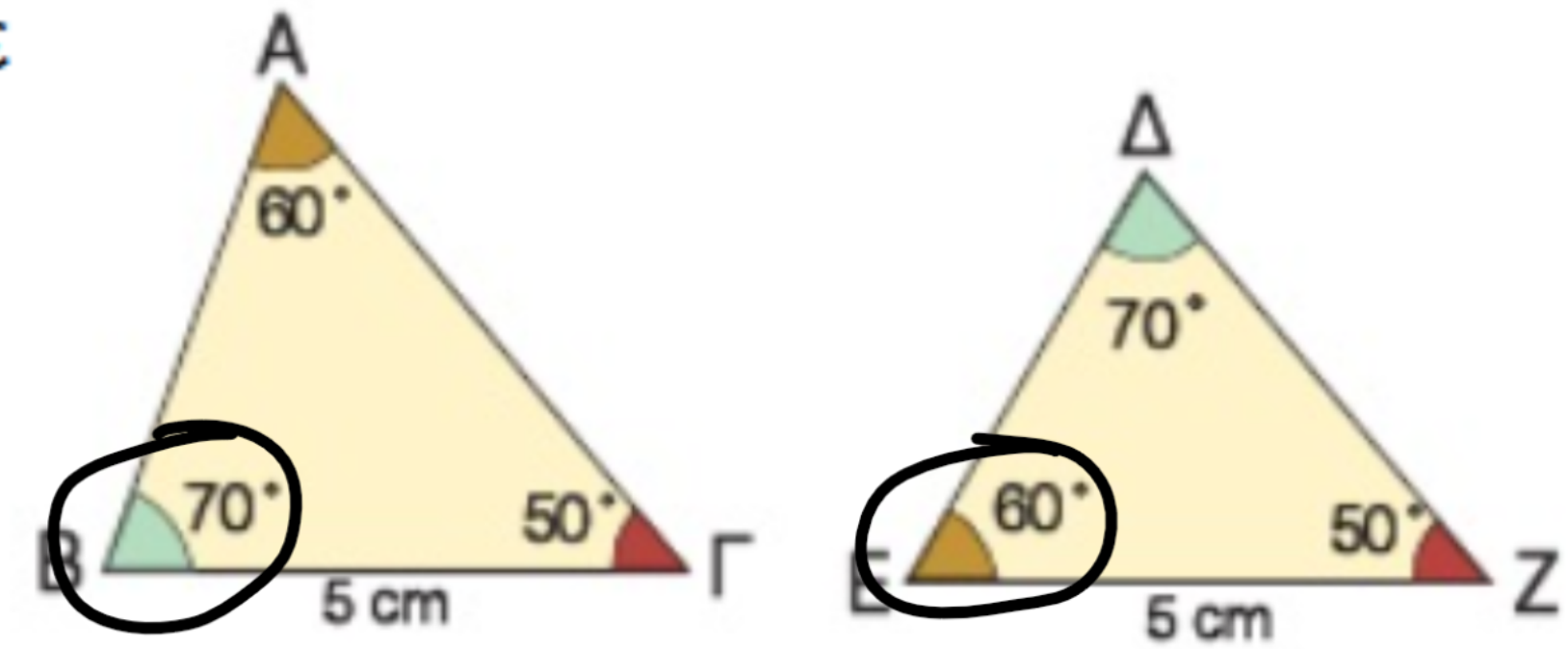
- 3** Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες $AB = \Delta \epsilon$ και $A\Gamma = \Delta z$



- 4** Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων του παρακάτω σχήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

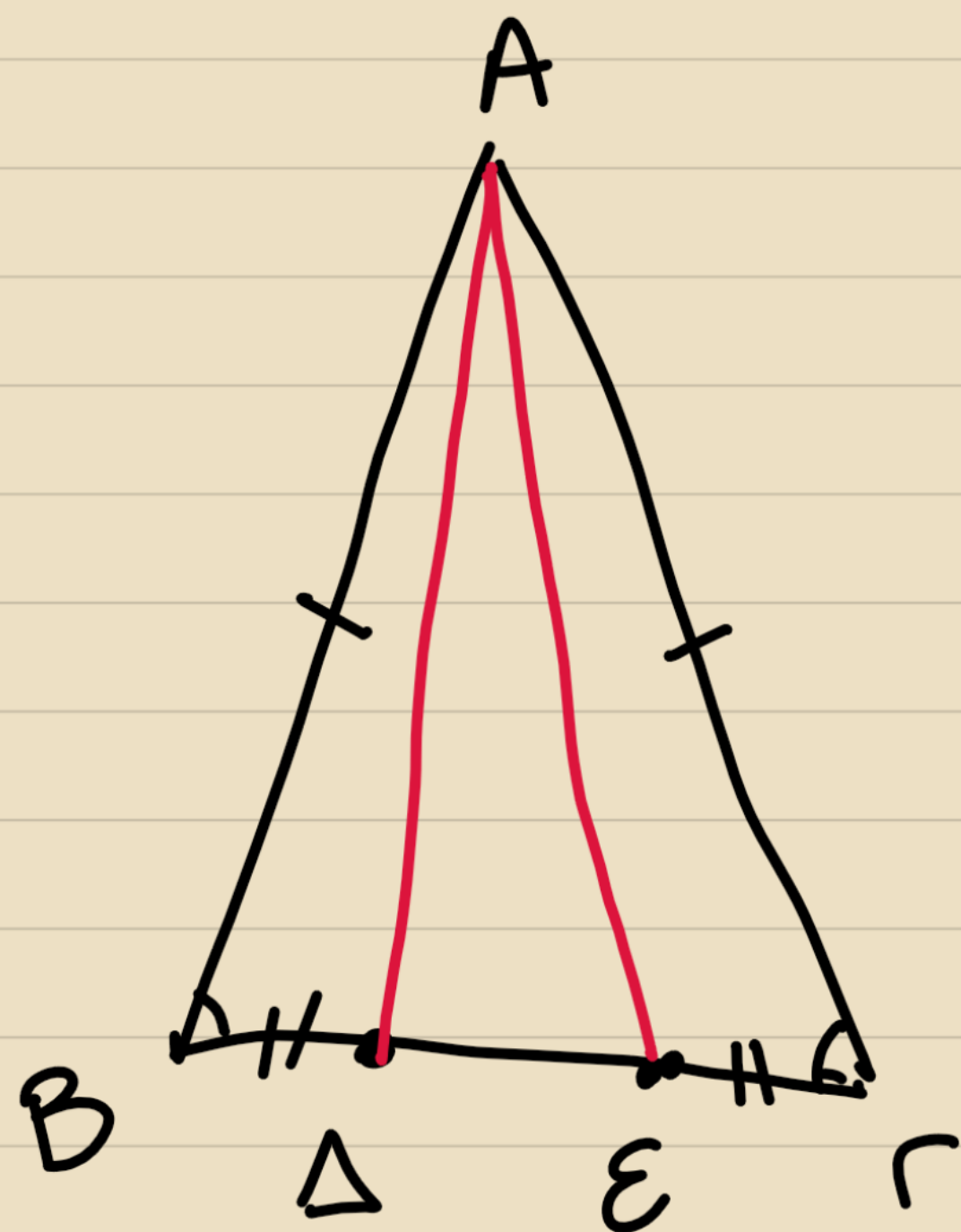


- 5** Είναι ίσα τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



3

Στη βάση $B\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ να πάρετε σημεία Δ , E , ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE$.



Συγκρίνω $\triangle AB\Delta$ & $\triangle A\Gamma E$

- $AB = A\Gamma$
- $B\Delta = E\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

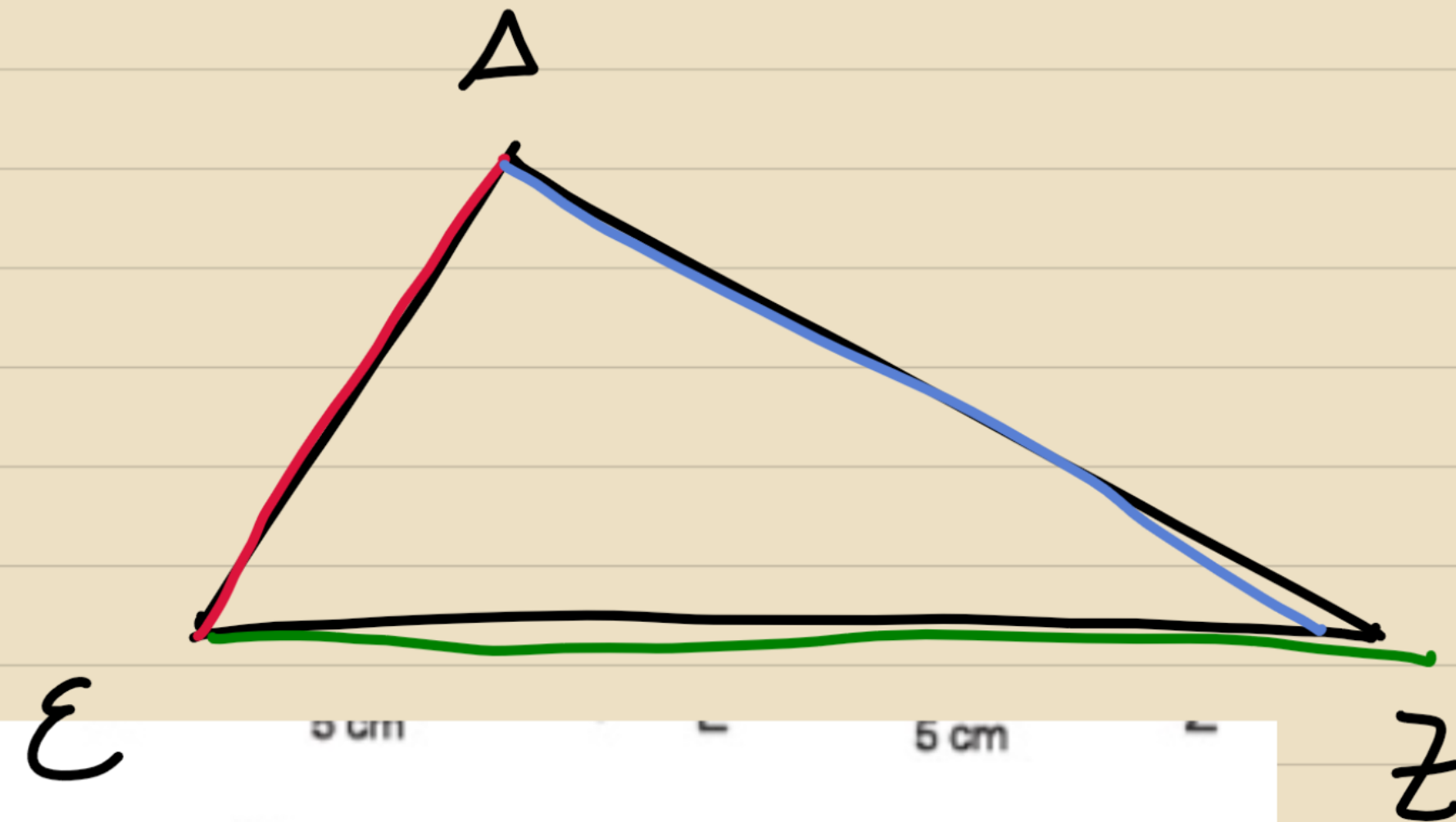
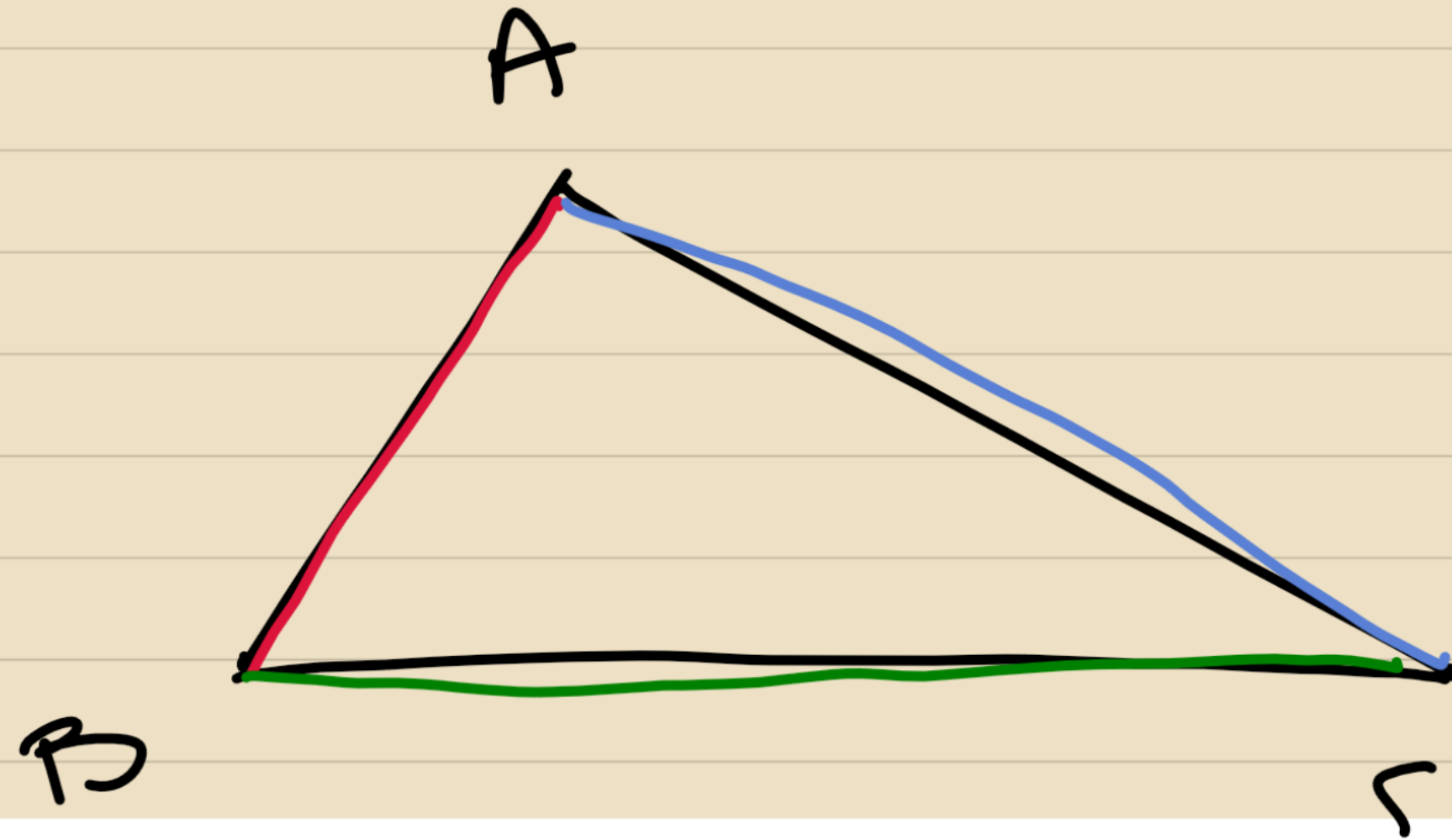
$\Pi - \Gamma - \Pi$

αφαιρέσει

αφαιρέσει $A\Delta = AE$

3 = κριτήριο 1607ης φιλώνων (π-π-π)

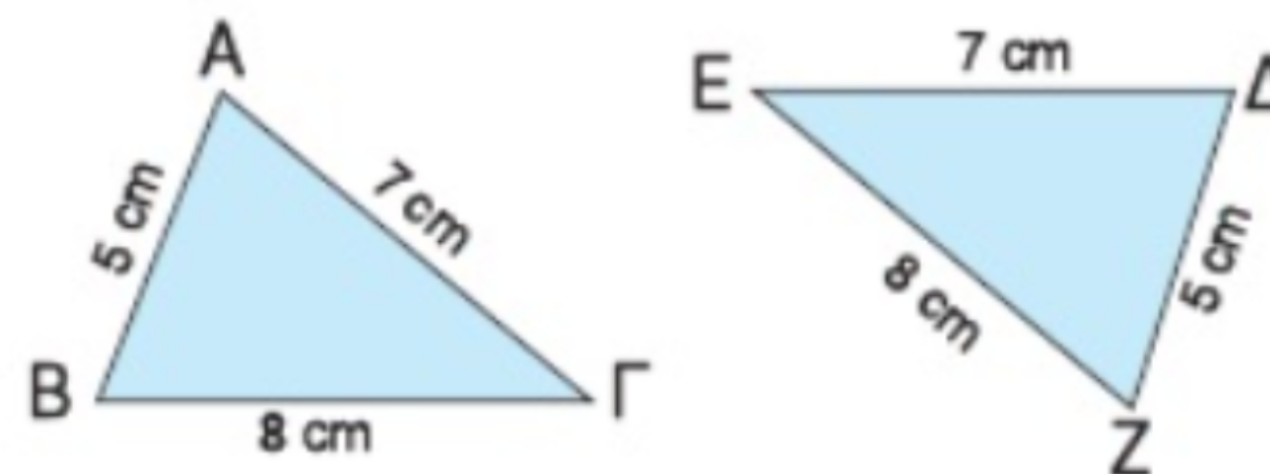
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



6

Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του σχήματος της επόμενης σελίδας και να συμπληρώσετε τις ισότητες

$\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{Ζ}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Ε}$



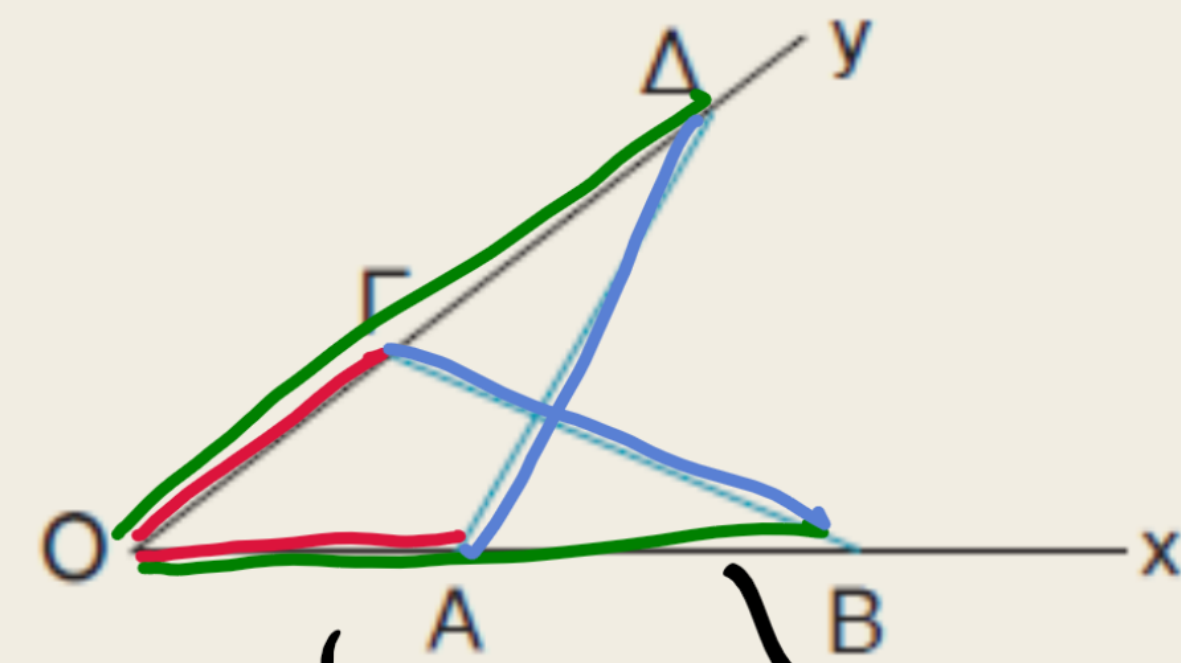
π-π-π

Να αποδείξετε ότι $A\Delta = A\Gamma$.

4

Στο διπλανό σχήμα είναι $OA = OG$ και $OB = OD$.

Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = A\Delta$.



Συγκρίνω $\triangle O B \Gamma$ & $\triangle O A \Delta$

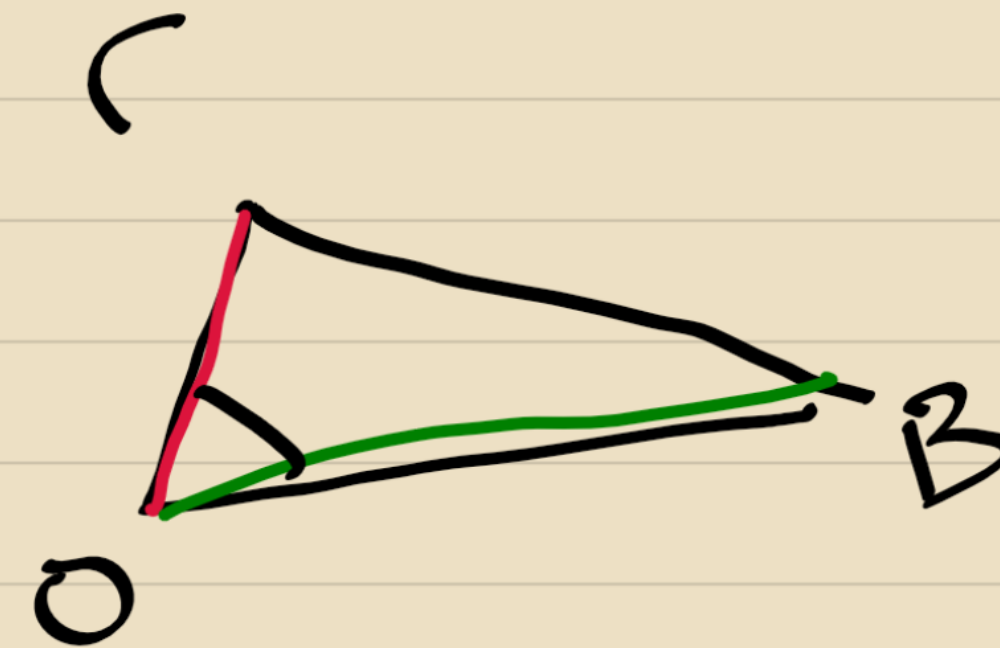
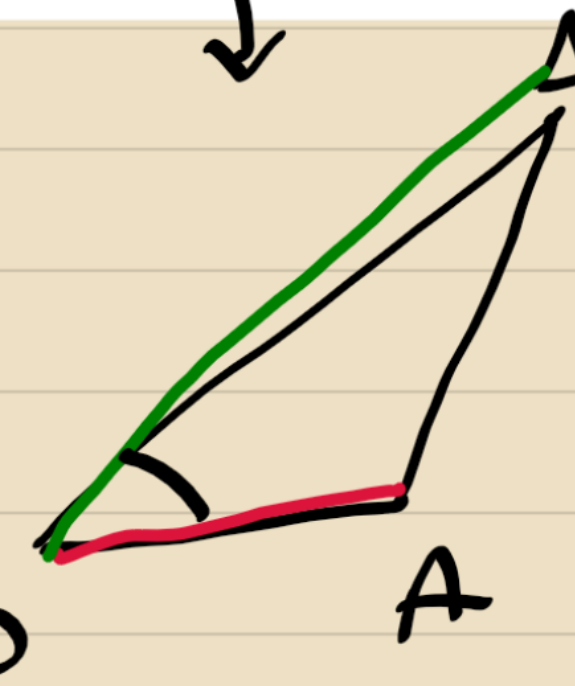
• $OG = OA$

• $OB = OD$

• $\hat{O}$ κοινή

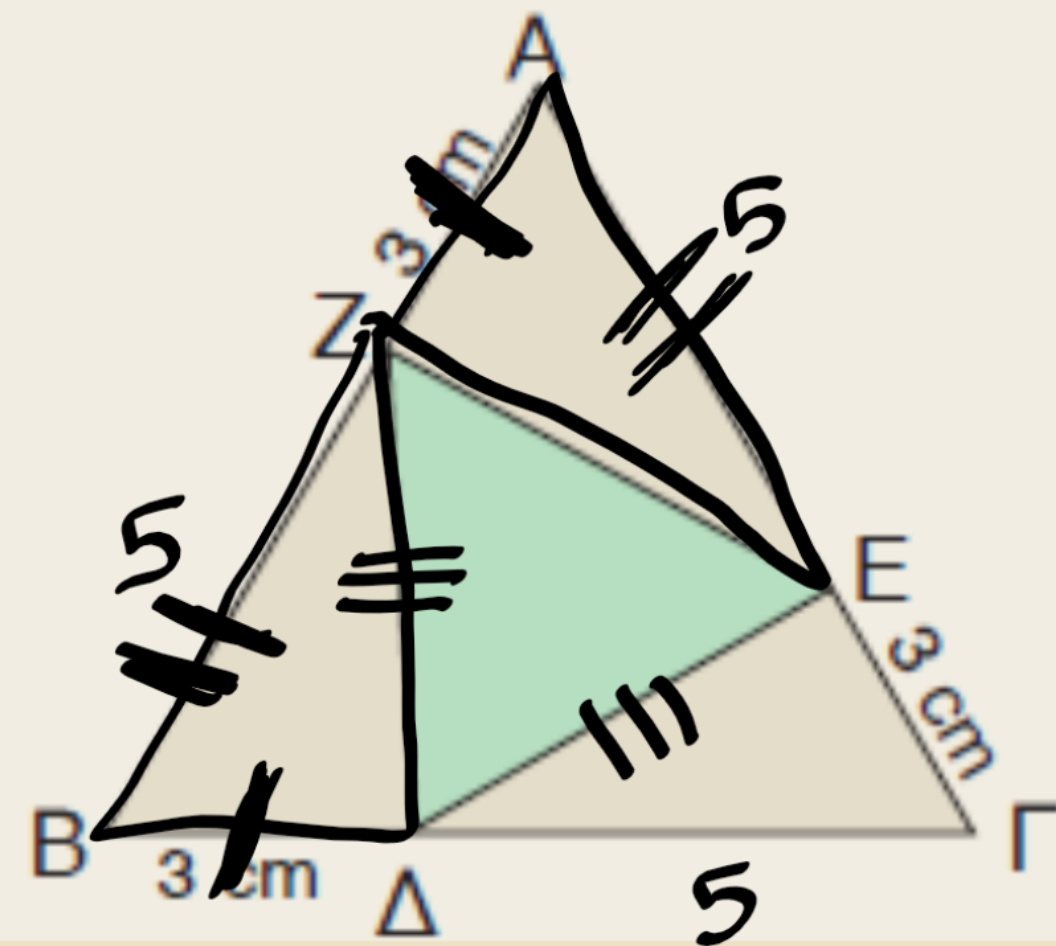
$\Rightarrow$ στο $\hat{A} - \hat{G} - \hat{D}$

ισχύει $B\Gamma = A\Delta$.



5

Κάθε πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 8 cm. Αν είναι $AZ = B\Delta = \Gamma E = 3$ cm, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι ισοπλευρο.



Θέλουμε να δείξουμε ότι $\Delta Z = ZE = \Delta E$

Συγκρίνω $\triangle \epsilon \Gamma$ & $\triangle Z B$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet B\Delta = E\Gamma \\ \bullet BZ = \Delta\Gamma \\ \bullet \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \pi - \gamma - \pi$$

με ισα

με $\Delta E = \Delta Z$

Όλοια συγκρίνω $\triangle B\Delta$ & $\triangle A\epsilon$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet AZ = B\Delta \\ \bullet BZ = A\epsilon \\ \bullet \hat{B} = \hat{A} = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \pi - \gamma - \pi$$

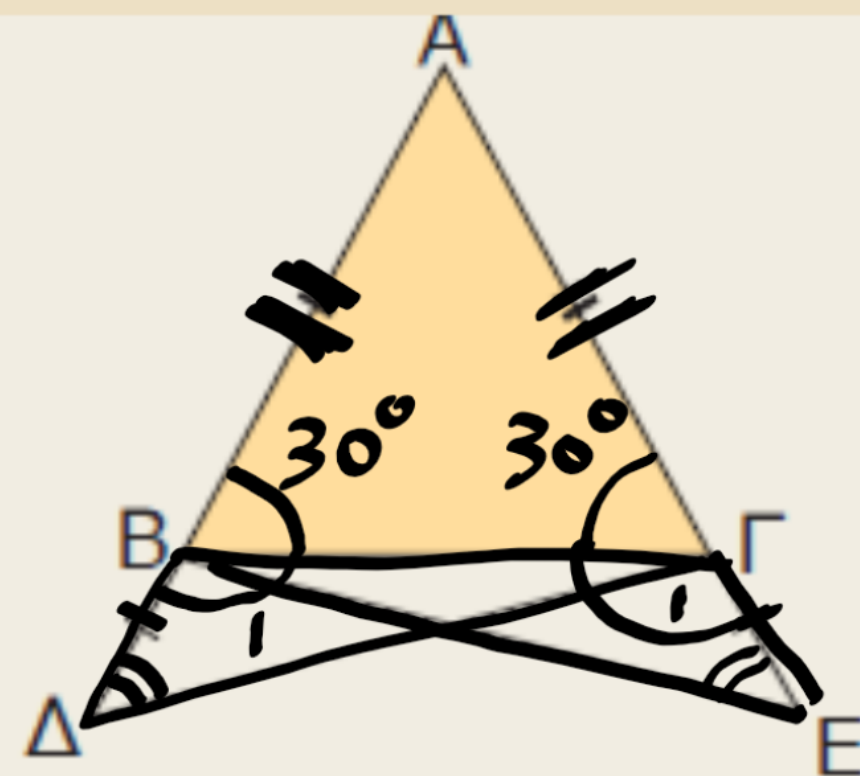
με ισα

με $ZE = Z\Delta$

Τελικα $\triangle \epsilon Z$ ισομικρο

6

Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB , AG
 ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ να πάρετε
 αντιστοίχως τμήματα $B\Delta = \Gamma E$.
 Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta} = \hat{E}$.



Συγκρίνω $B\hat{\Delta}\Gamma$ & $B\hat{\Gamma}E$

• $B\Gamma$ κοινή

• $B\Delta = \Gamma E$

• $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$

ως παρατηρούμεται ίσα γωνίες

} $\Rightarrow$

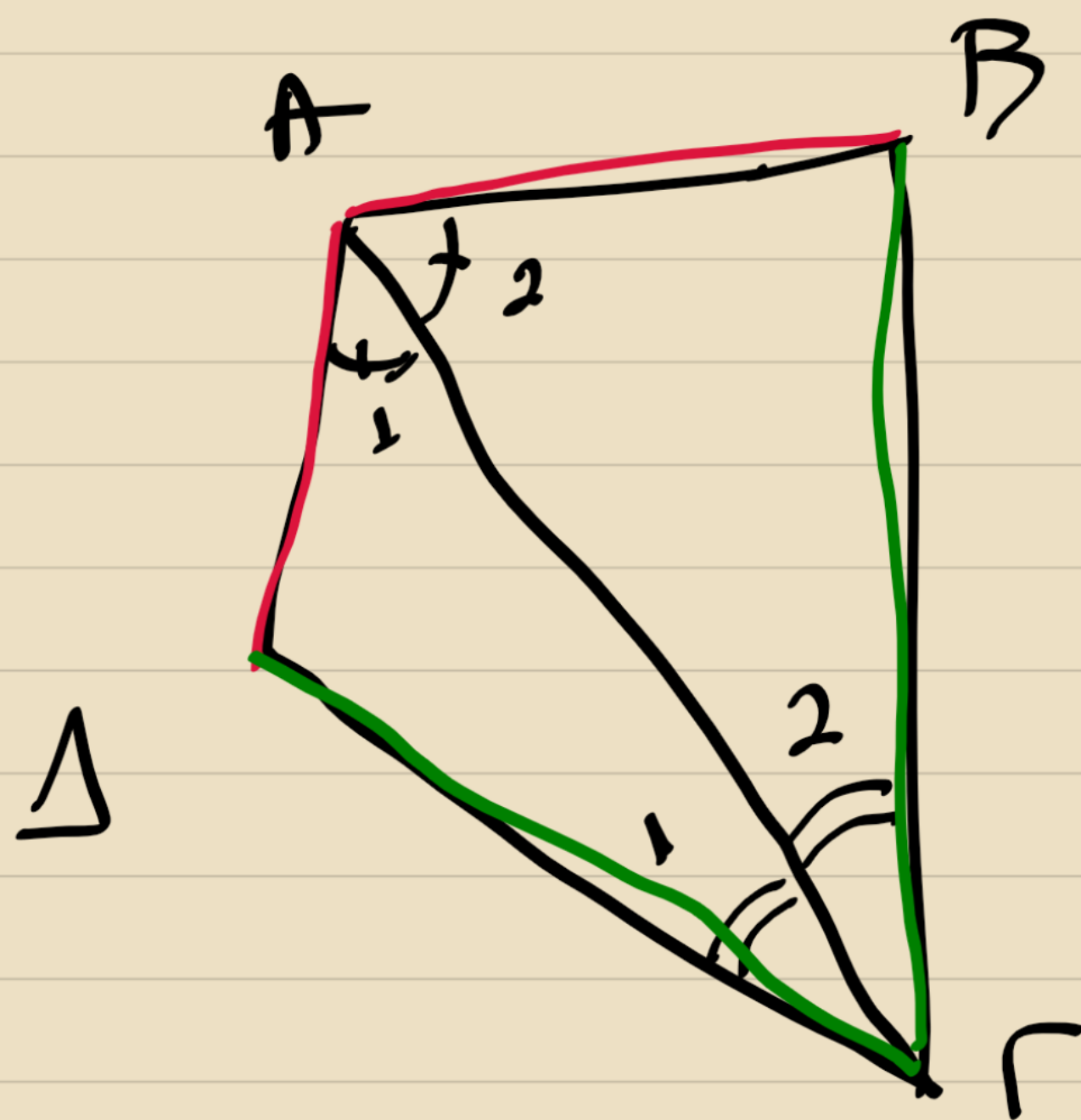
$\Pi - \Gamma - \Pi$

ίσα αρα

$\hat{\Delta} = \hat{E}$.

7

Σ' ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ η διαγώνιος $A\Gamma$ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.
 Να αποδείξετε ότι $AB = A\Delta$ και $B\Gamma = \Gamma\Delta$.

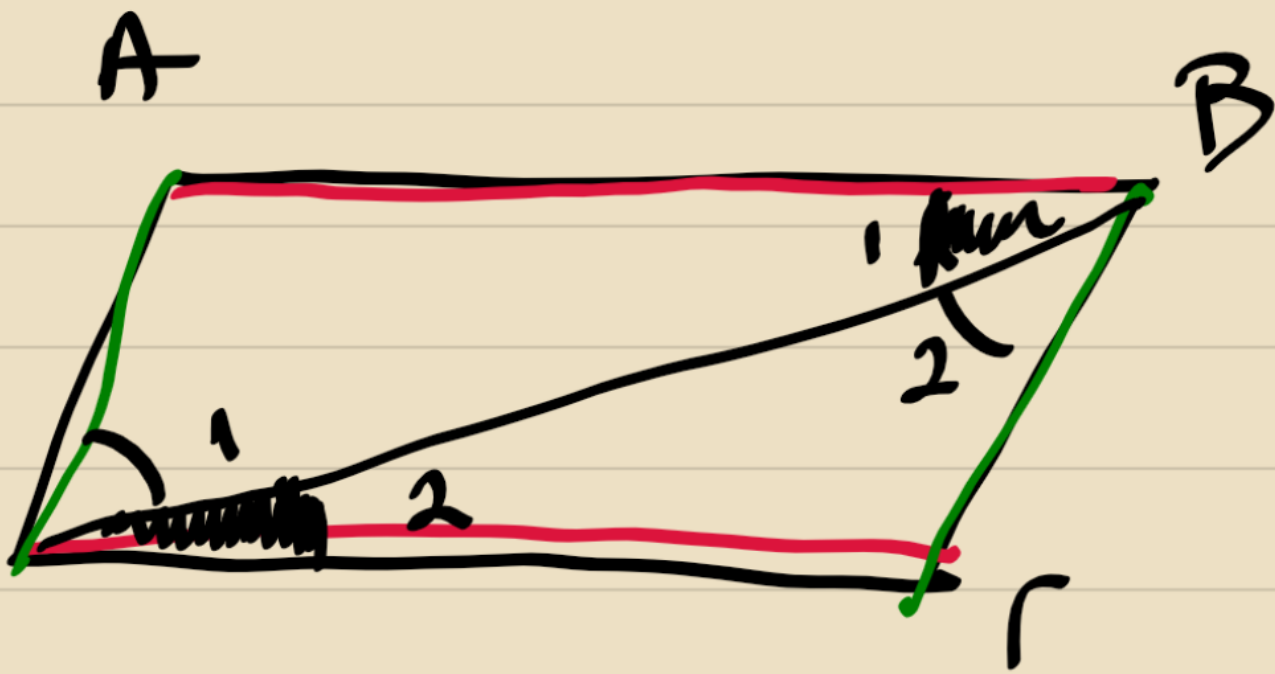


Συγκρίνω τα $\triangle A\Delta\Gamma$ & $\triangle AB\Gamma$

- $A\Gamma$ κοινή
 - $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 - $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$
- $\left. \begin{array}{l} \text{• } A\Gamma \text{ κοινή} \\ \text{• } \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \text{• } \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma - \Pi - \Gamma \text{ ως ίσα}$
- ως $AB = A\Delta$
 και
 $B\Gamma = \Delta\Gamma$

8

Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.



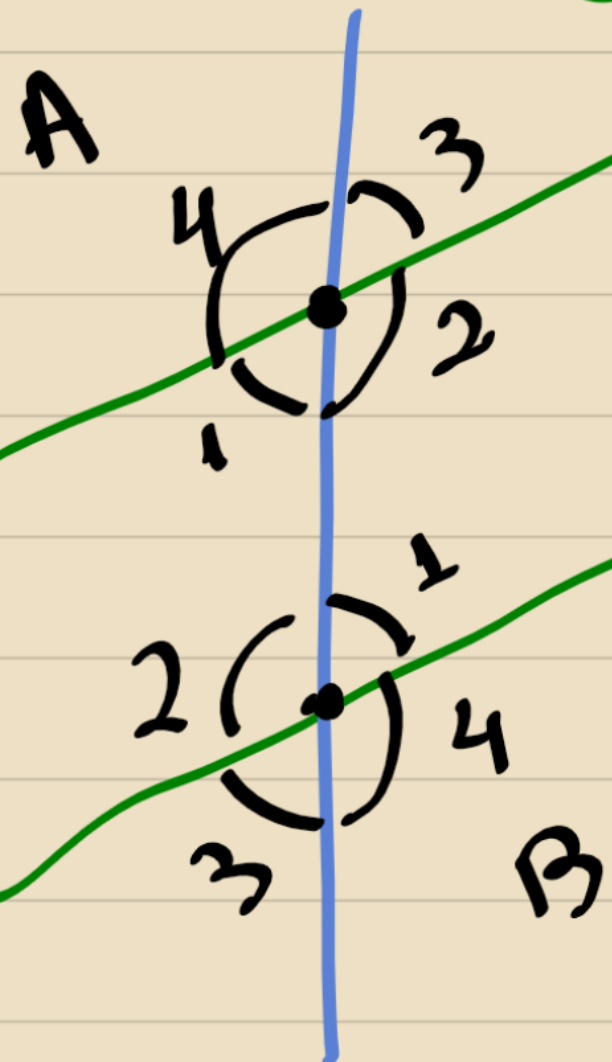
Θέλω να δείξω ότι $AB = DC$ και $AD = BC$

Θέλω την BD

Συγκρίνω $\triangle ABD$ & $\triangle BDC$

$\cdot \hat{B}_1 = \hat{D}_2$ ως εντός εναλλάξ
 $\cdot \hat{B}_2 = \hat{D}_1$ ως εντός εναλλάξ
 $\cdot DB$ κοινή

$\Rightarrow \Gamma - \Pi - \Gamma$
 ίσα
 αφού
 $AB = DC$
 και
 $AD = BC$



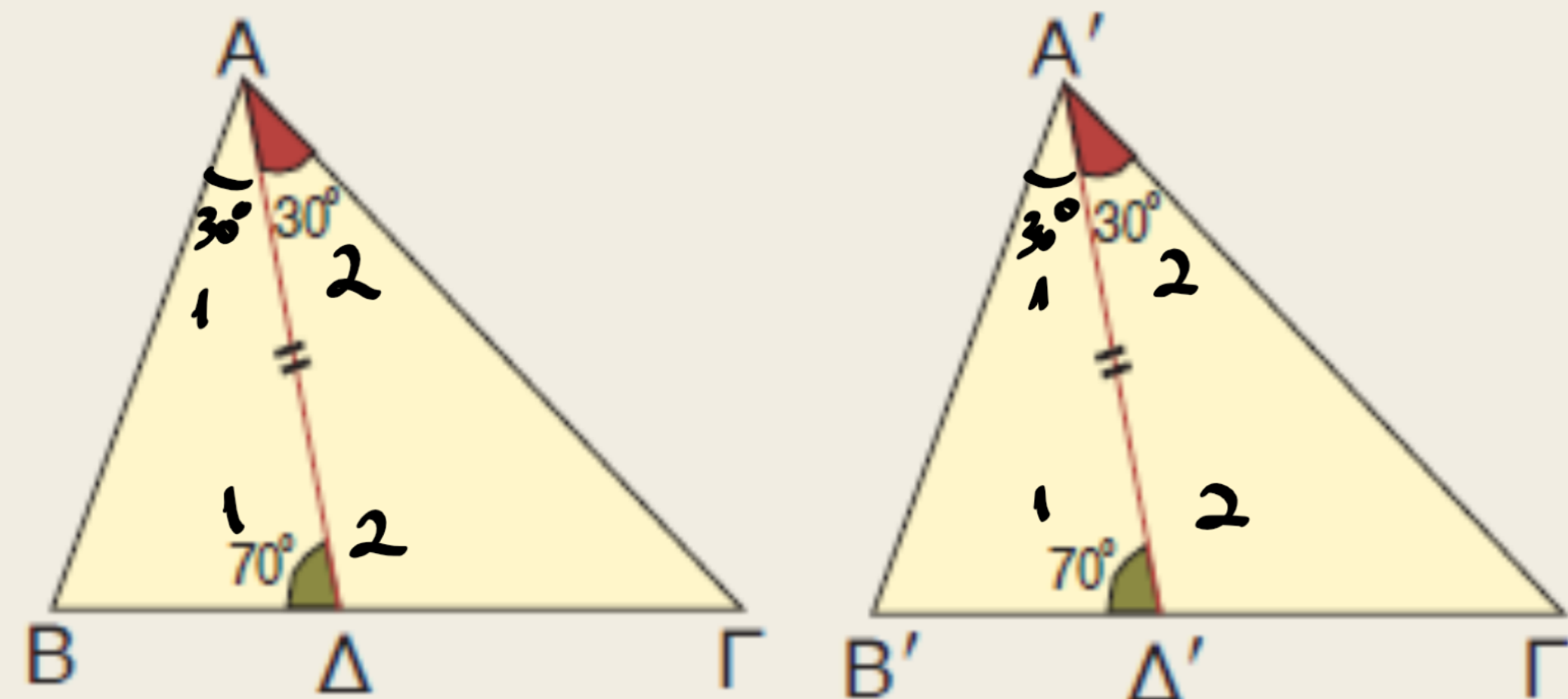
Εντός εναλλάξ είναι
 ίσες

9

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του διπλανού σχήματος έχουν τις διχοτόμους AD και $A'D'$ ίσες. Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = A'B'$

β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



α) Συγκρίνω $\triangle ABD$ & $\triangle A'B'D'$

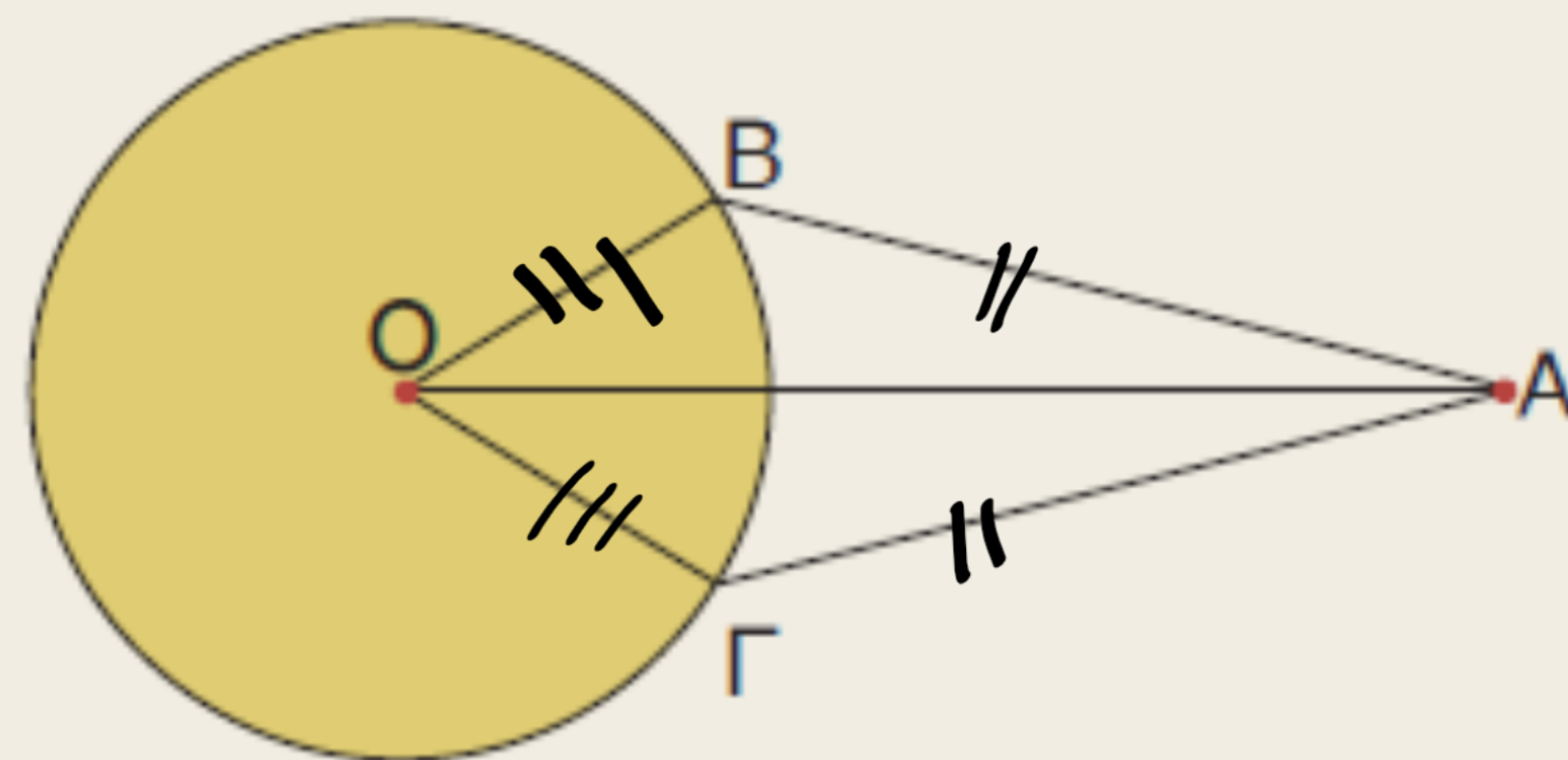
$$\left. \begin{array}{l} \cdot \hat{A}_1 = \hat{A}'_1 = 70^\circ \\ \cdot \hat{A}_2 = \hat{A}'_2 = 30^\circ \\ \cdot AD = A'D' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Γ-Π-Γ} \\ \text{ίσα} \\ \text{και οφει} \\ AB = A'B' \end{array}$$

β) Συγκρίνω $\triangle AB\Gamma$ & $\triangle A'B'\Gamma'$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \hat{A} = \hat{A}' \\ \cdot \hat{B} = \hat{B}' \\ \cdot AB = A'B' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Γ-Π-Γ} \\ \text{οφει ίσα} \end{array}$$

10

Στο διπλανό σχήμα το σημείο A ισαπέχει από τα σημεία B και Γ ενός κύκλου που έχει κέντρο το σημείο O . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OAB και OAG είναι ίσα.



Συγκρίνω $\triangle OBA$ & $\triangle OGA$

• $BA = AG$

• $OB = OG$ ως ακτινές

• OA κοινή



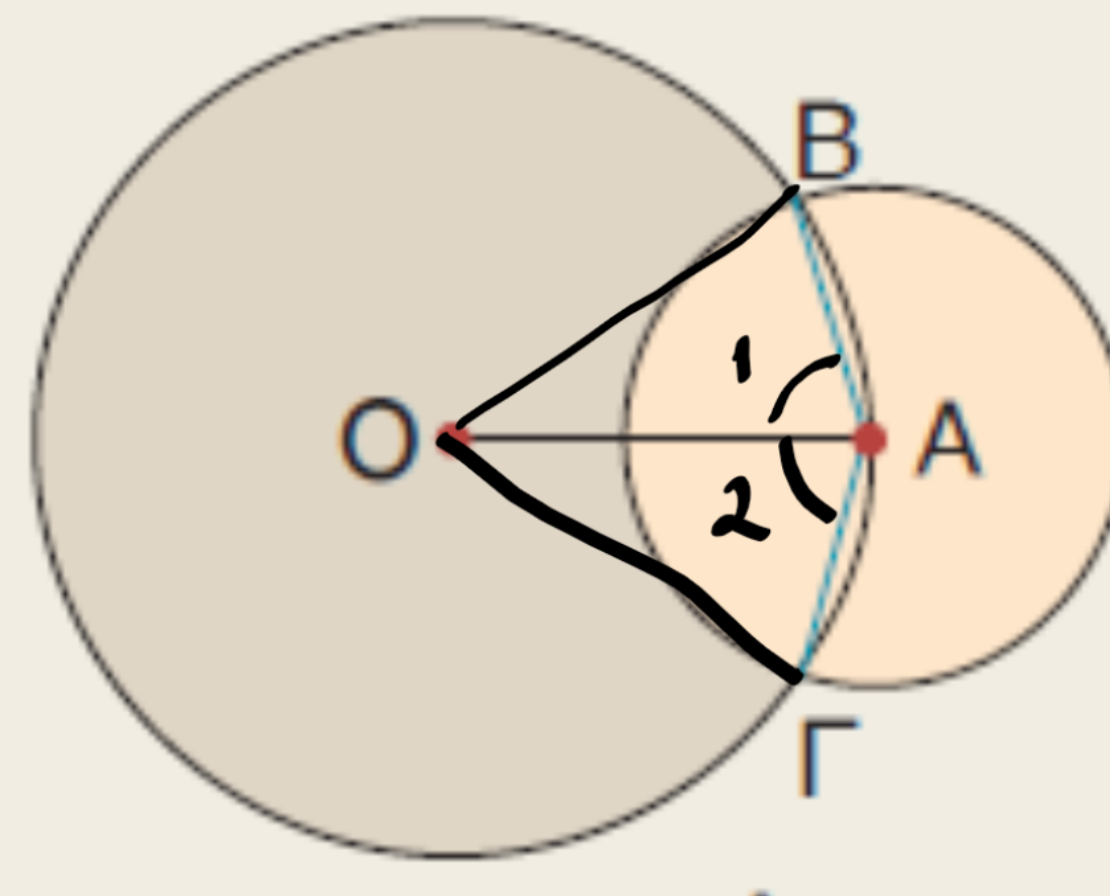
$\Rightarrow$

$\Pi - \Pi - \Pi$
με ICA .

Σελ 195

11

Αν O, A είναι τα κέντρα των κύκλων του διπλανού σχήματος, να αποδείξετε ότι η AO διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BAG}$.



Θέλω να δείξω ότι $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

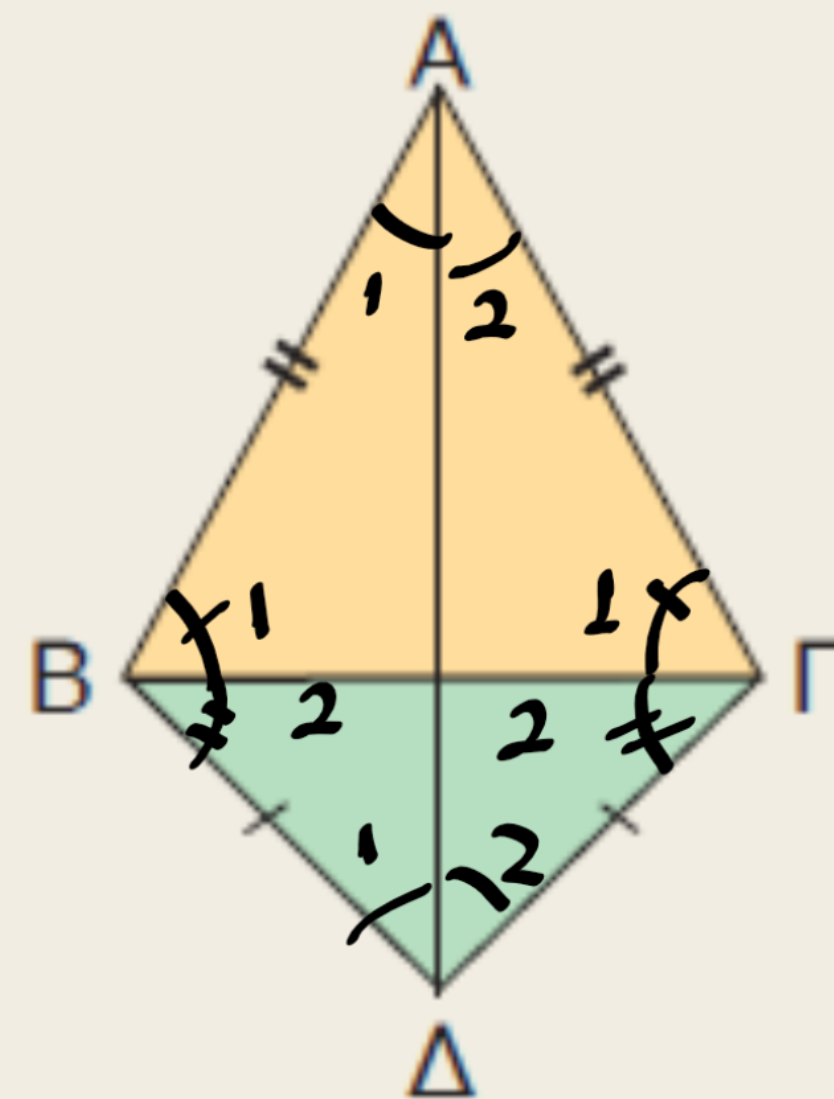
Συγκρίνω $\triangle OAB$ & $\triangle OAG$

- $BA = AG$ ως ακτίνες των κύκλων Γ_B & Γ_A
- $OB = OG$ ως ακτίνες Γ_O - // - - // -
- OA κοινή

$\left. \begin{array}{l} A \\ O \end{array} \right\} \Rightarrow \pi - \pi = \pi$
 άρα
 $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

12

Τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ του διπλανού σχήματος έχουν κοινή βάση $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η $A\Delta$ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$.



Θέλω να δείξω ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$
 Συμπεριαν $A\hat{B}\Delta$ & $A\hat{\Gamma}\Delta$

► Ισότητα ορθογωνίων τριγώνων

1 $\cong$ κριτήριο

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν

- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή

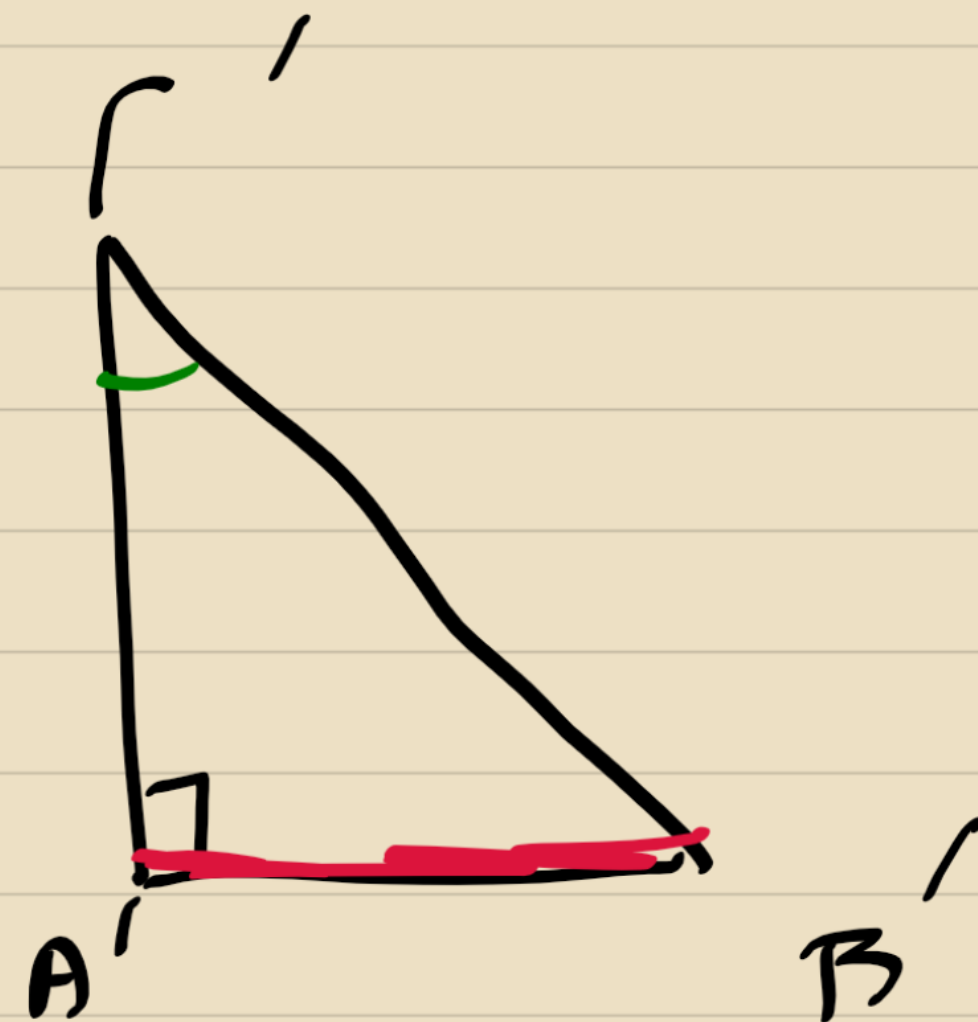
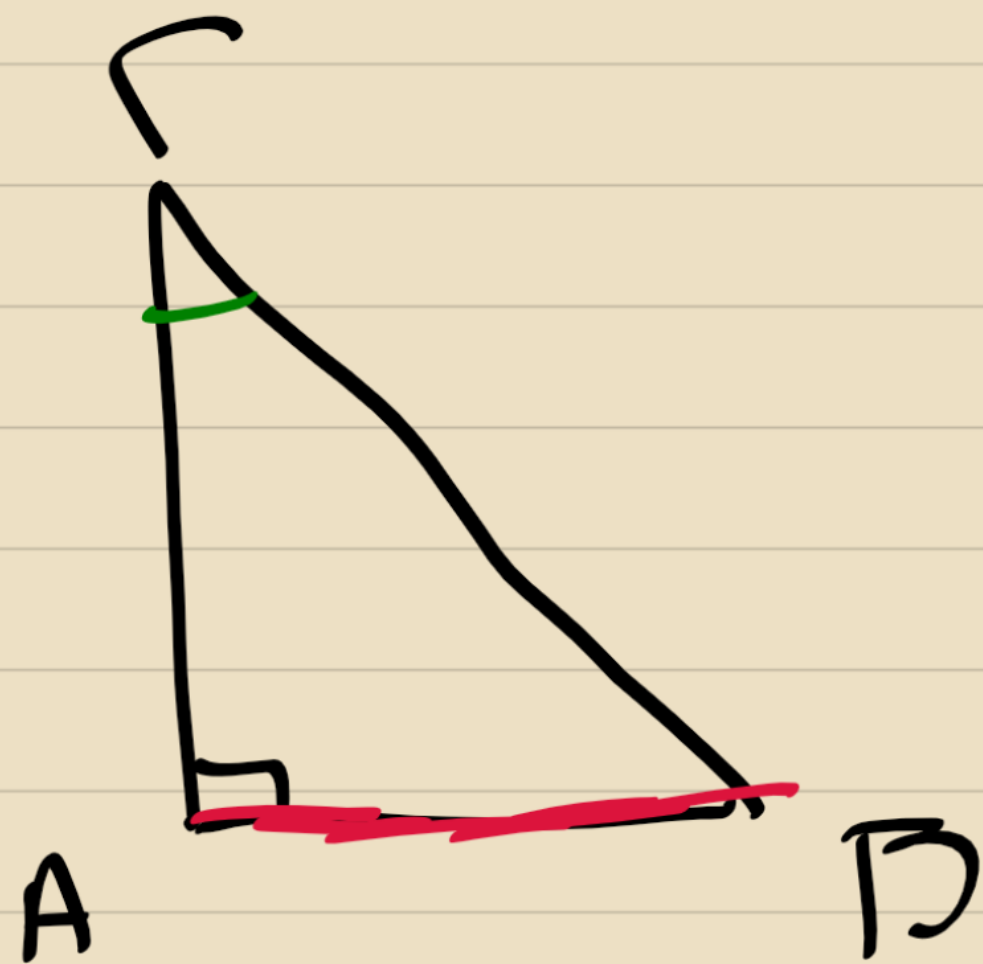
- ~~μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.~~



2 ο κριτήριο

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν

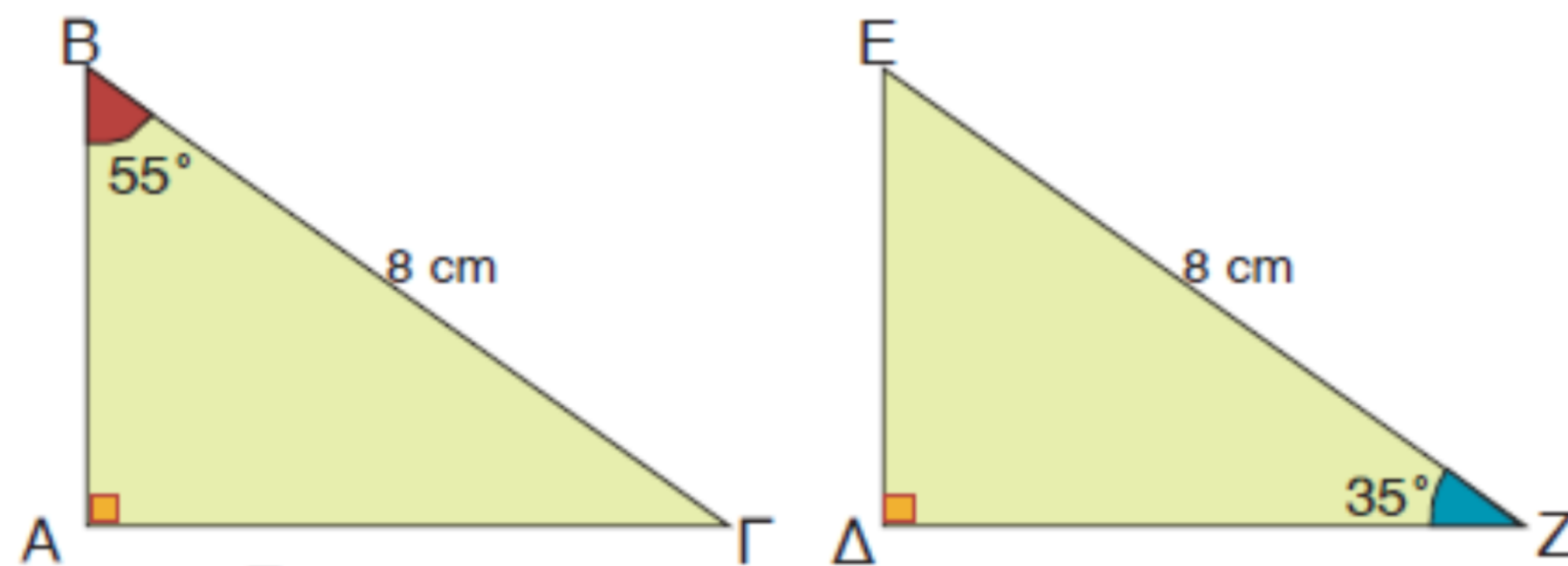
- ~~δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή~~
- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.



8

Είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος;

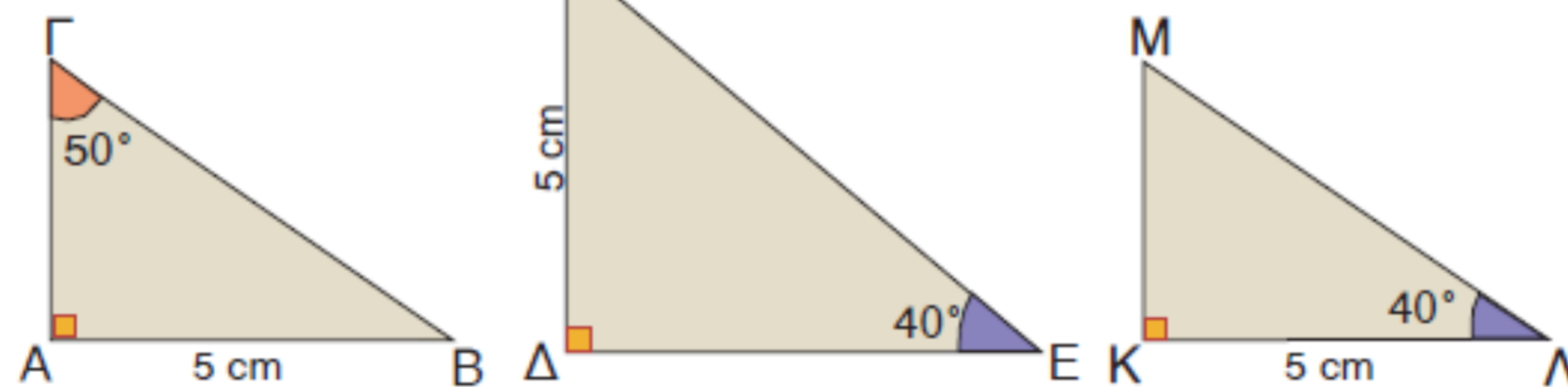
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



9

Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



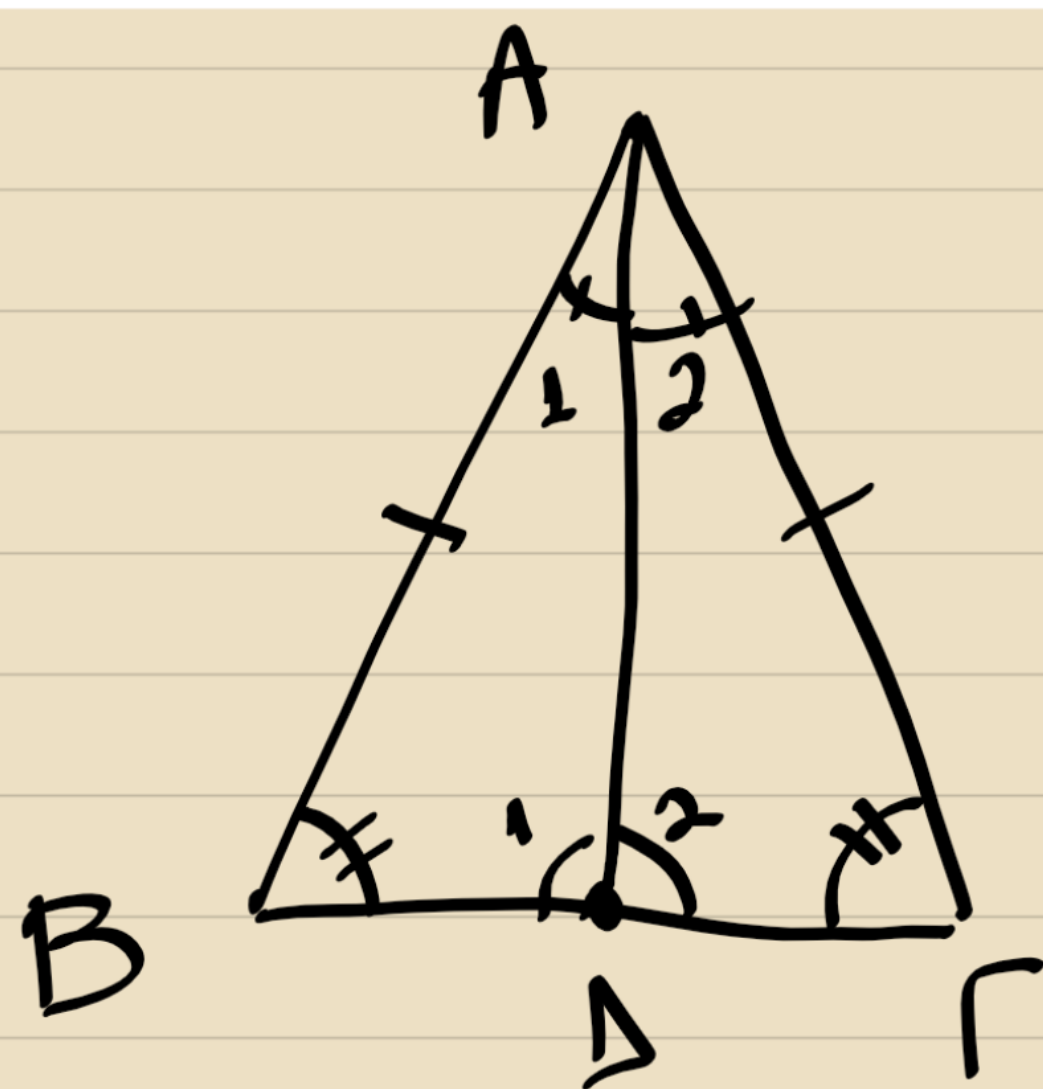
► Παρατήρηση / άσκηση

1

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τη διχοτόμο AD .

α) Να συγκριθούν τα τρίγωνα ABD και $AD\Gamma$.

β) Να αποδειχθεί ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και ότι η διχοτόμος AD είναι διάμεσος και ύψος.



α) Συγκρίνω $\triangle ABD$ & $\triangle AD\Gamma$

- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
- $AB = A\Gamma$

$\Rightarrow$ γ-π-γ είναι ίσα

β) Θέλω να δείξω ότι $BD = D\Gamma$ για να δείξω ότι είναι διάμεσος.

Αφού τα τρίγωνα που (α) είναι ίσα έχω ότι $BD = D\Gamma$
Θέλω να δείξω ότι $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90^\circ$ για να δείξω ότι είναι ύψος
αφού $\hat{B}\hat{D}\hat{\Gamma} = 180^\circ$ και αφού στο (α) $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ έχω ότι $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90^\circ$.

Άρα



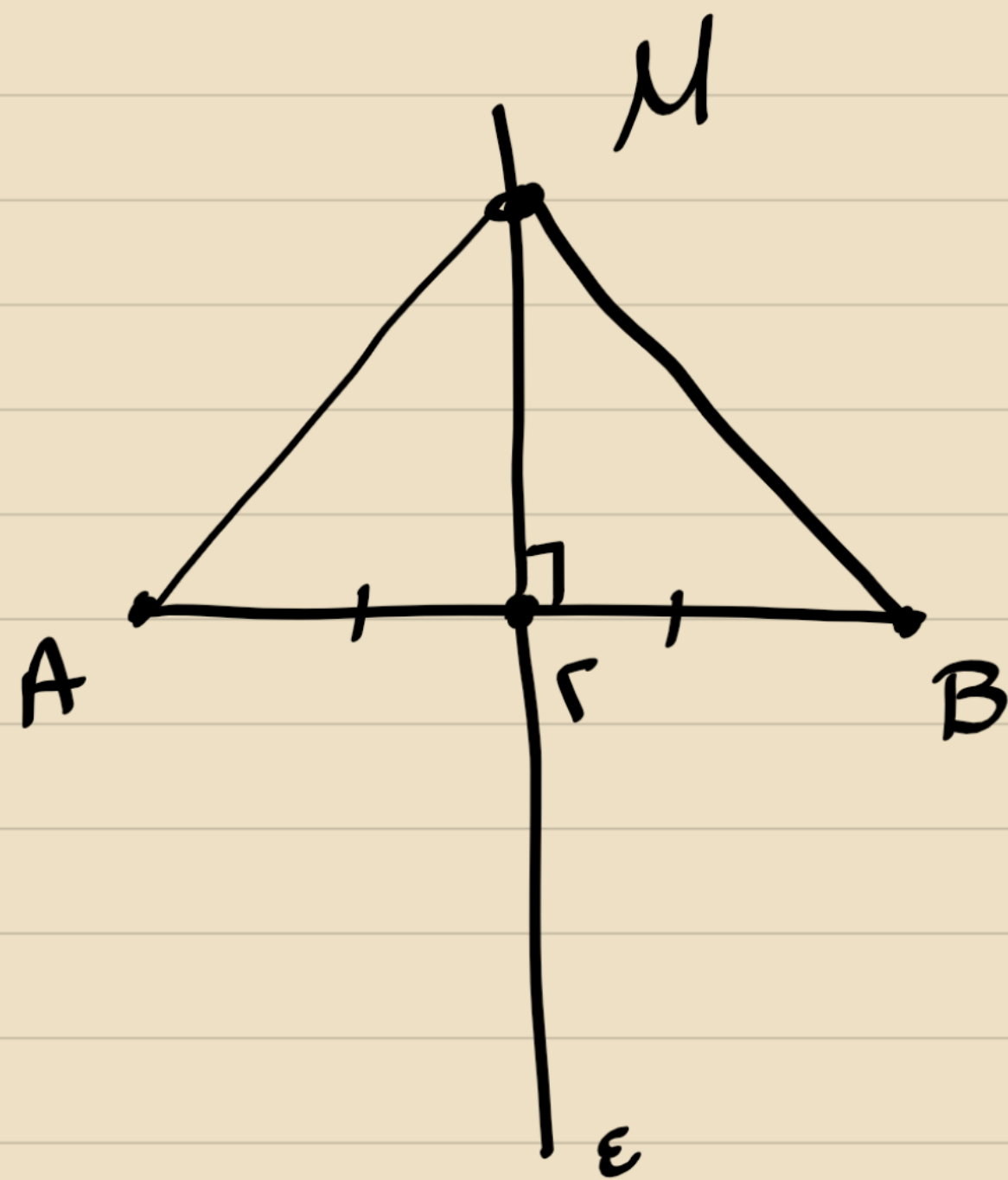
Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.
- β) Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπτουν.

Παρατήρηση / Άσκηση

3

Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.



Έστω M τυχαίο σημείο
της μεσοκαθέτου, θέλω να
δείξω ότι $MA = MB$

Συνοψίζω $\triangle AM\Gamma$ και $\triangle MB\Gamma$

- Ορθογώνια

- $AG = GB$

- MG κοινή

Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

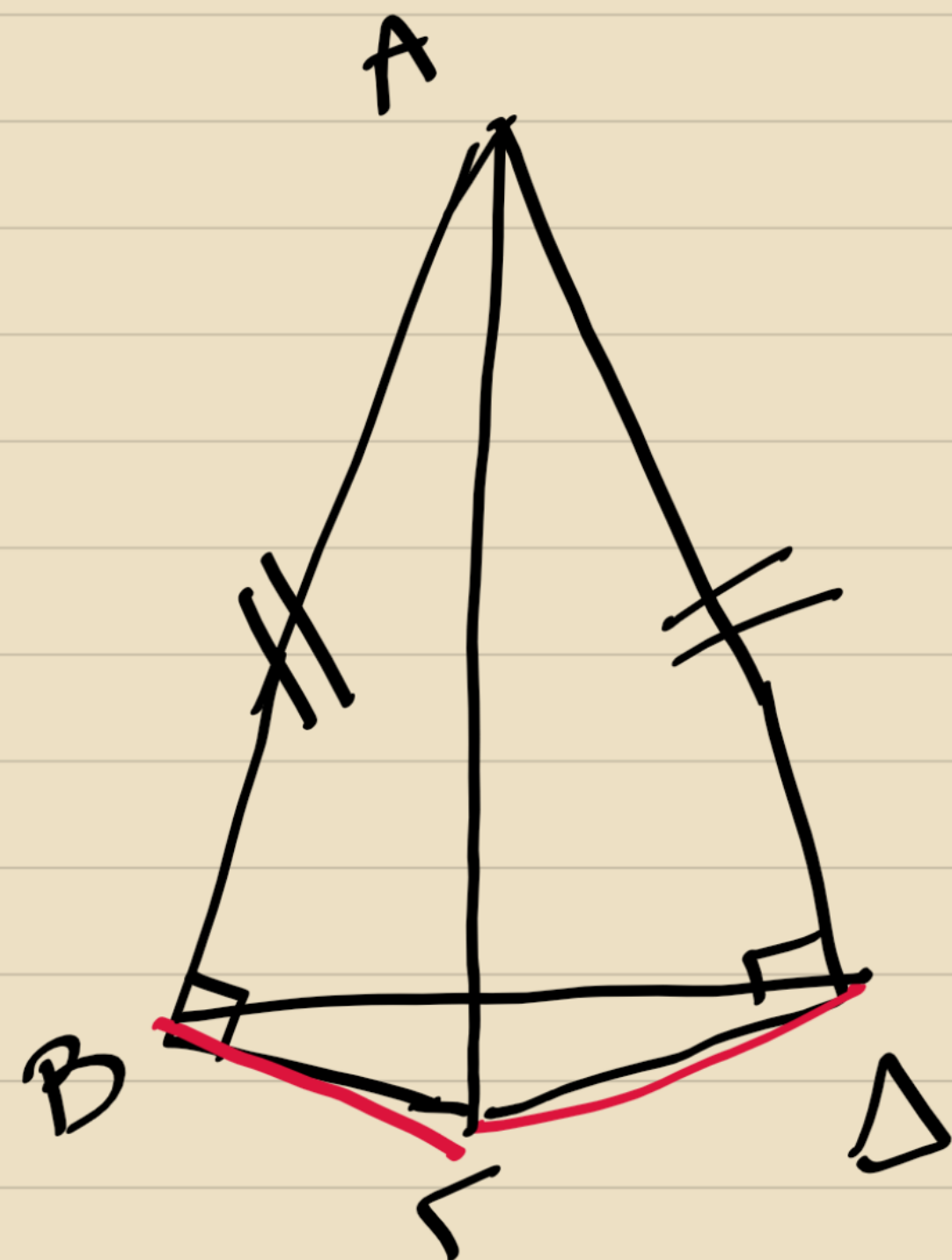
Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Αποδεικνύεται ακόμη ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.

16

Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $AB = AD$. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = \Gamma\Delta$ και ότι η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του $B\Delta$.



Συγκρίνω $\triangle AB\Gamma$ & $\triangle A\Gamma\Delta$

• Ορθογώνια

• $AB = AD$

• $A\Gamma$ κοινή

από 1^η & 2^η ορθογ.

Είναι 1^η ορθογ.

$B\Gamma = \Gamma\Delta$.

Αφού $AB = AD$ τότε το σημείο
A είναι σημείο της $\perp$ που διέρχεται

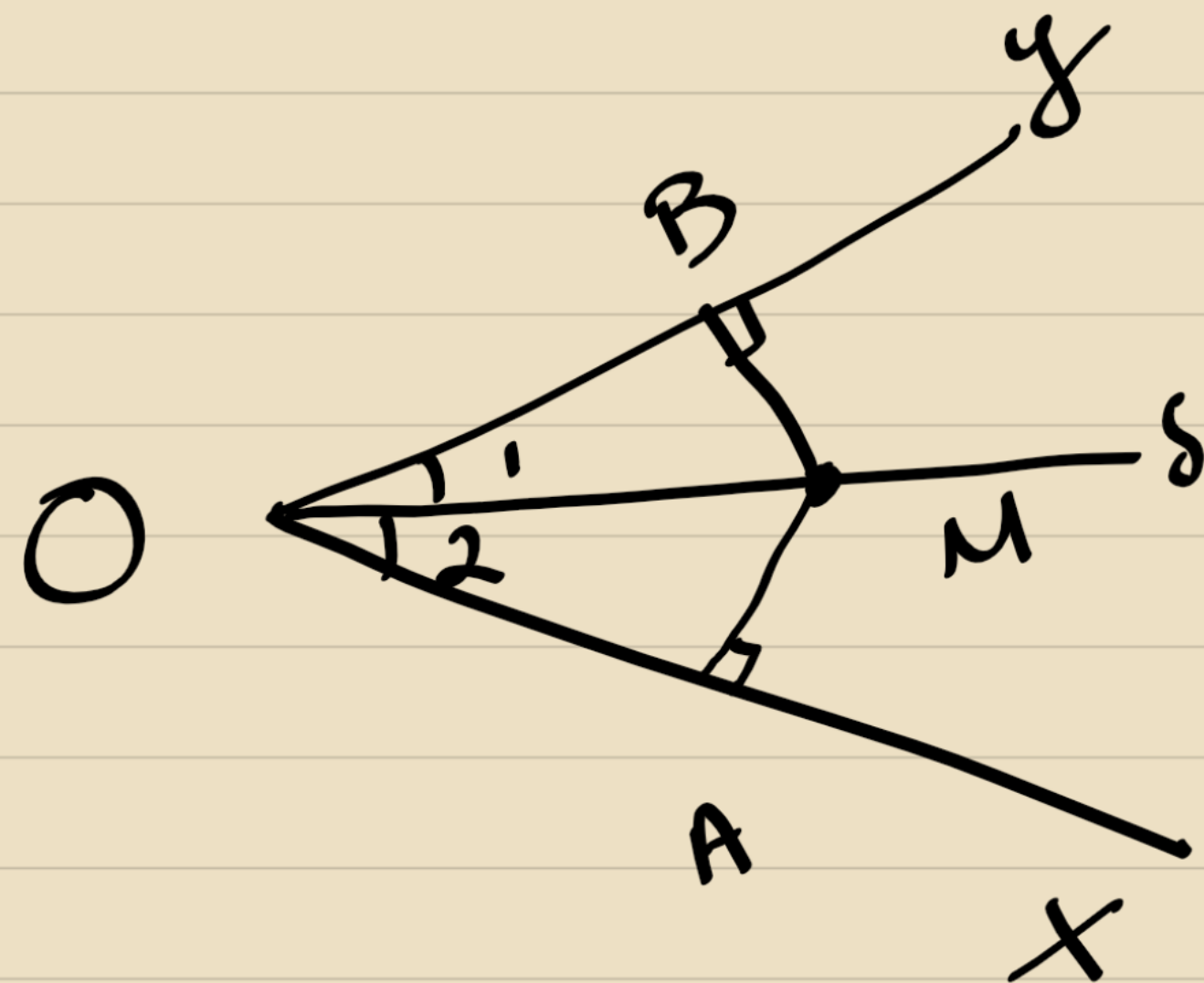
Αφού $B\Gamma = \Gamma\Delta$ τότε το σημείο
Γ είναι σημείο της $\perp$ που διέρχεται

από $B\Delta$.

φρ $A\Gamma$ $\perp$ διχομήτρου

► Παρετήρηση / Άσκηση

4 Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.



Έστω M τυχαίο σημείο της διχοτόμου
Θέλω να δείξω ότι $BM = MA$

Συγκρίνω τα $\triangle OMB$ & $\triangle OMA$

- Ορθογώνια

- OM κοινή

- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

} $\left. \begin{array}{l} \text{κρ. ιατ.} \\ \text{κοδ. τριγ.} \end{array} \right\}$
Είναι ίσα

και $BM = AM$

Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

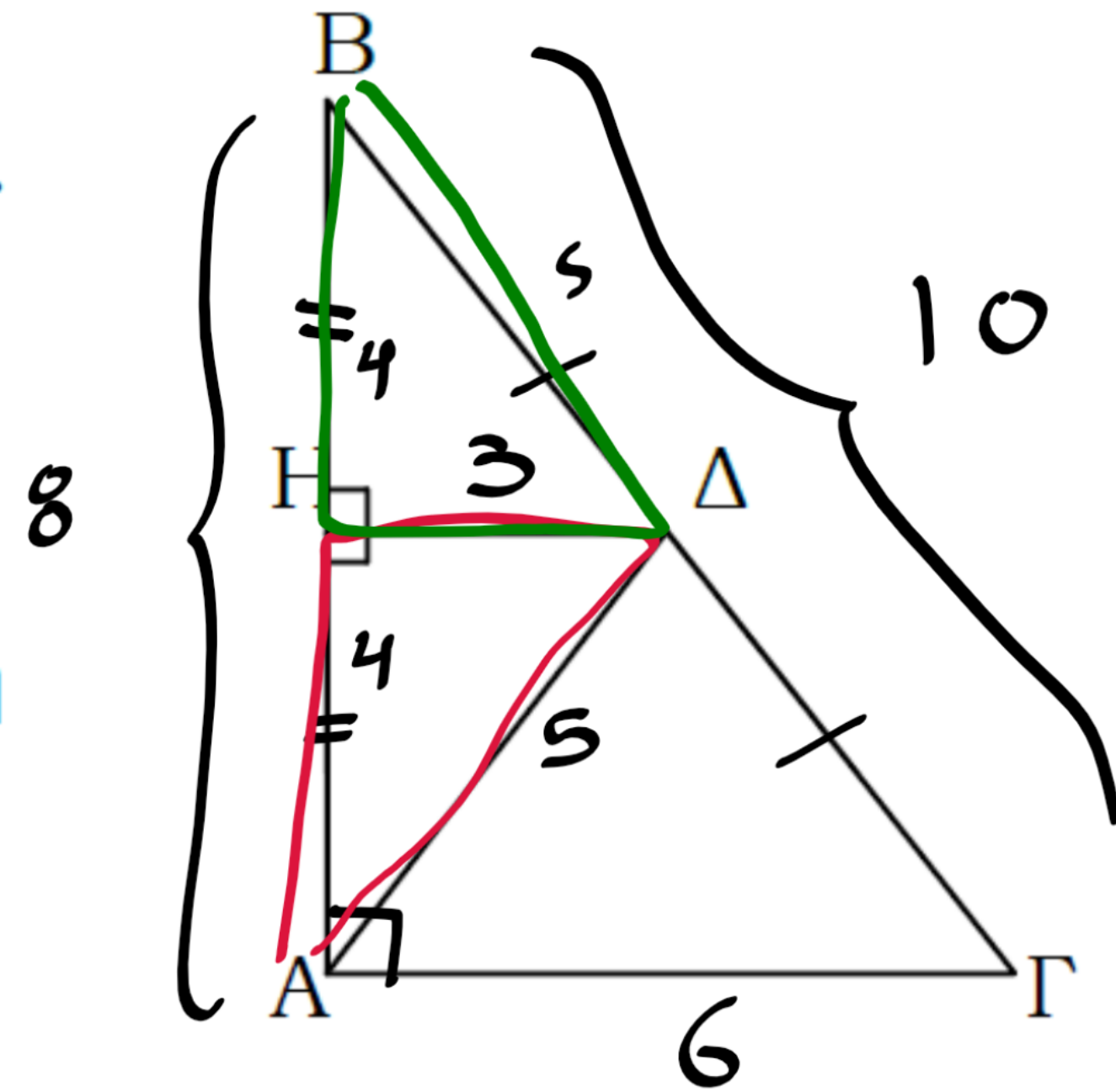
Αποδεικνύεται ακόμη ότι :

Κάθε εσωτερικό σημείο μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου της.

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$)
 τα Δ, H είναι μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα.
 Επίσης το ΔH είναι κάθετο στην AB

A) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $A\Delta H$ και $B\Delta H$

B) Αν $A\Gamma = 6\text{cm}$ και $B\Gamma = 10\text{cm}$ να υπολογίσετε τα μήκη
 των ΔH και $A\Delta$.



α) Συγκρίνω $\hat{A}\hat{\Delta}H$ και $\hat{B}\hat{\Delta}H$

- Ορθογώνια
- $AH = BH$
- $H\Delta$ κοινή

από hyp. και
 αρθ. τμή.
 είναι ίσα

β) Σε $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ από Π.Θ.

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$$

$$10^2 = 36 + AB^2$$

$$AB^2 = 64$$

$$AB = 8$$

Επίσης,

Σε $\hat{B}\hat{H}\hat{\Delta}$ από Π.Θ

$$B\Delta^2 = BH^2 + H\Delta^2$$

$$25 = 16 + H\Delta^2 \Rightarrow H\Delta = 3$$

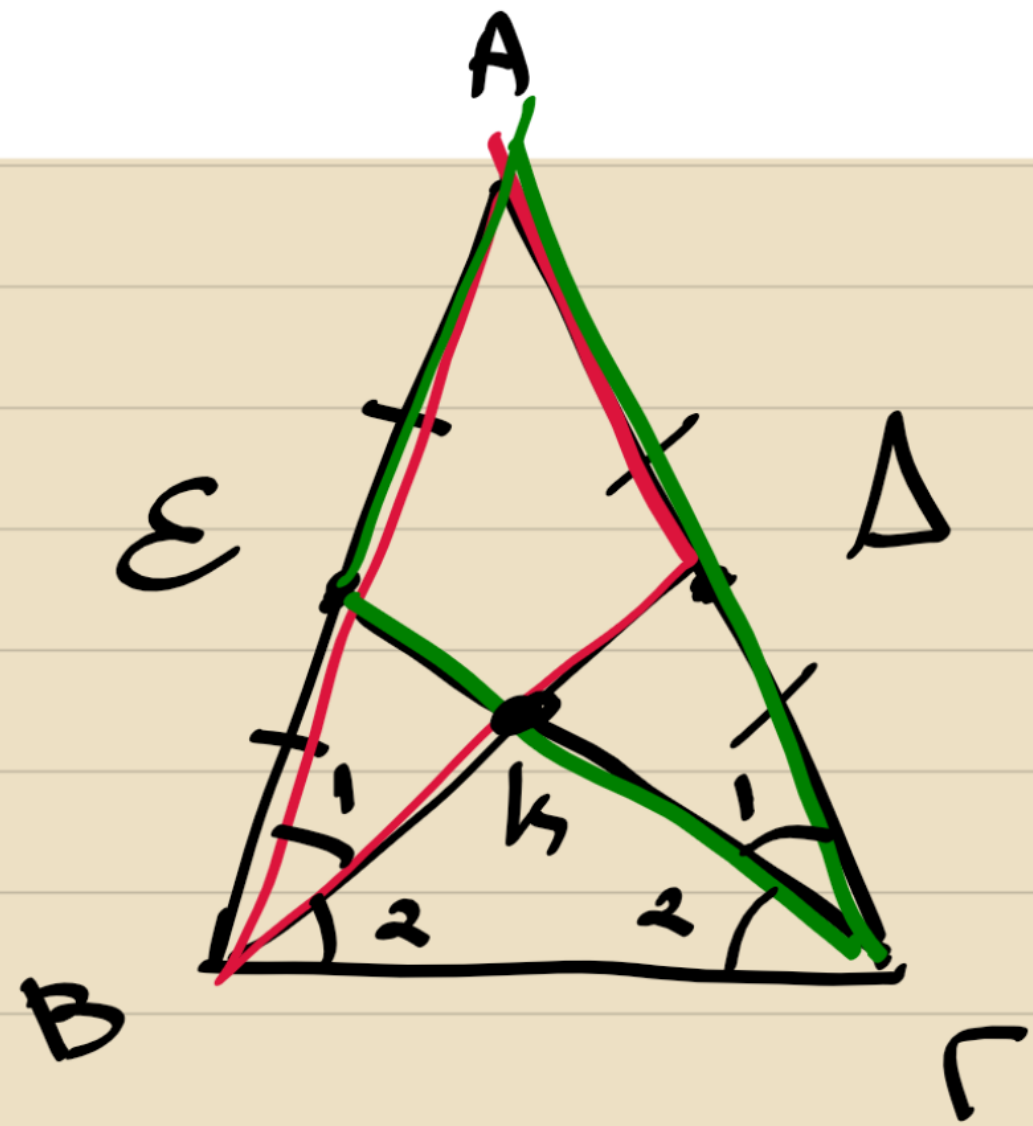
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και οι διαμέσοί του $B\Delta$ και ΓE . Αν K είναι το σημείο τομής των διαμέσων, τότε να αποδείξετε:

A. τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 3)

B. Το τρίγωνο $B\Gamma K$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 3, $\bar{6}$)



α) Συγκρίνω $\triangle AB\Delta$ και $\triangle A\Gamma E$

- $\hat{A}$ κοινή
- $AE = A\Delta$
- $AB = A\Gamma$

} $\Pi - \Gamma - \Pi$
αρα ίσα

ε) Έχω ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ αφού ισοσκελές
απερ έχω ότι $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$
αυτ $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$ αρα ισοσκελές