

5 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $7\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2$

~~β) $5x^2 - 8xy + 3y^2$~~

γ) $3x^2 - xy - 2y^2$

$$\begin{aligned}\alpha) \quad 7\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2 &= 7\alpha^2 + 7\alpha\beta + 3\alpha\beta + 3\beta^2 = \\ &= 7\alpha(\alpha + \beta) + 3\beta(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(7\alpha + 3\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma) \quad 3x^2 - xy - 2y^2 &= 3x^2 - 3xy + 2xy - 2y^2 = \\ &= 3x(x - y) + 2y(x - y) = \\ &\quad (x - y)(3x + 2y)\end{aligned}$$

7

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) 2\alpha^2 - 2\alpha + \alpha\beta - \beta + \alpha x - x$$

$$\beta) 2\alpha\beta - 4\beta + 5\alpha - 10 + 2\alpha\gamma - 4\gamma$$

$$7) \quad \alpha) \quad 2\alpha^2 - 2\alpha + \alpha\beta - \beta + \alpha x - x =$$

$$2\alpha(\alpha - 1) + \beta(\alpha - 1) + x(\alpha - 1) =$$

$$= (\alpha - 1)(2\alpha + \beta + x)$$

11 Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

~~α) $x^2 - 49 = 0$~~

~~β) $9x^3 - 4x = 0$~~

~~γ) $x(x + 1)^2 = 4x$~~

~~δ) $(x + 2)^3 = x + 2$~~

a) $x^2 - 49 = 0$

$(x - 7) \cdot (x + 7) = 0$

$x - 7 = 0$ ή $x + 7 = 0$

$x = 7$

$x = -7$

$a \cdot b = 0$

$a = 0$ ή $b = 0$

19 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 + 3x + 2$

β) $y^2 - 4y + 3$

γ) $\omega^2 + 5\omega + 6$

δ) $\alpha^2 + 6\alpha + 5$

ε) $x^2 - 7x + 12$

στ) $y^2 - y - 12$

ζ) $\omega^2 - 9\omega + 18$

η) $\alpha^2 + 3\alpha - 10$

$$\begin{aligned} \alpha) \quad x^2 + 3x + 2 &= \underline{x}^2 + \underline{x} + \underline{2x} + \underline{2} = \\ &= x(x+1) + 2(x+1) = (x+1)(x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad y^2 - 4y + 3 &= y^2 - y - 3y + 3 = \\ &= y(y-1) - 3(y-1) = (y-1)(y-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \quad \omega^2 + 5\omega + 6 &= \omega^2 + 3\omega + 2\omega + 6 = \\ &= \omega(\omega+3) + 2(\omega+3) = (\omega+3)(\omega+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) \quad \alpha^2 + 6\alpha + 5 &= \alpha^2 + \alpha + 5\alpha + 5 = \\ &= \alpha(\alpha+1) + 5(\alpha+1) = (\alpha+1)(\alpha+5) \end{aligned}$$

19 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

~~α)~~ $x^2 + 3x + 2$

~~β)~~ $y^2 - 4y + 3$

~~γ)~~ $\omega^2 + 5\omega + 6$

~~δ)~~ $\alpha^2 + 6\alpha + 5$

~~ε)~~ $x^2 - 7x + 12$

~~στ)~~ $y^2 - y - 12$

~~ζ)~~ $\omega^2 - 9\omega + 18$

~~η)~~ $\alpha^2 + 3\alpha - 10$

A' Λύσεις

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha}$

ii) $\frac{(\alpha^2 - \alpha) + 2\alpha - 2}{\alpha^2 - 1}$

1) i) $\frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha(\alpha - 1)} = \frac{\cancel{\alpha} \cdot (\alpha - 1)^2}{\cancel{\alpha} \cdot (\alpha - 1)} = \alpha - 1$

ii) $\frac{(\alpha^2 - \alpha) + 2\alpha - 2}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha(\alpha - 1) + 2(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} =$
 $= \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}{(\cancel{\alpha - 1})(\alpha + 1)} = \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}$

4. i) Να δείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$.
 ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999} \right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999} \right)^2$$

$a \quad b \quad a \quad b$

$$\frac{5}{5} = 1$$

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{a}{b} = \frac{xa}{yb}$$

4) i) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

$$\begin{aligned} (a+b)^2 - (a-b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = \\ &= \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2} = 4ab \end{aligned}$$

ii) $\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999} \right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999} \right)^2 \stackrel{ii)}{=} 4 \cdot \frac{999}{1000} \cdot \frac{1000}{999} = 4$

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i) $1001^2 - 999^2$ ii) $99 \cdot 101$ iii) $\frac{(7,23)^2 - (4,23)^2}{11,46}$.

$$i) \quad 1001^2 - 999^2 = (1001 - 999)(1001 + 999) = 2 \cdot 2000 = 4000$$

$$ii) \quad 99 \cdot 101 = (100 - 1) \cdot (100 + 1) = 100^2 - 1^2 = 10000 - 1 = 9999$$

$$iii) \quad \frac{(7,23)^2 - (4,23)^2}{11,46} = \frac{(7,23 - 4,23)(7,23 + 4,23)}{11,46} =$$

$$= \frac{3 \cdot \cancel{11,46}}{\cancel{11,46}} = 3$$

5. i) Να αποδείξετε ότι $a^2 - (a - 1)(a + 1) = 1$.
ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $(1,3265)^2 - 0,3265 \cdot 2,3265$.

$$i) \quad a^2 - (a - 1)(a + 1) = 1$$

$$a^2 - (a - 1)(a + 1) = a^2 - (a^2 - 1) = a^2 - a^2 + 1 = 1$$

$$ii) \quad (1,3265)^2 - 0,3265 \cdot 2,3265 = \\ = (1,3265)^2 - (1,3265 - 1) \cdot (1,3265 + 1) \stackrel{(i)}{=} 1$$

§ Ρητές Παράστασεις

$$\frac{\underline{\underline{n \cdot x}}}{\frac{2x+3}{x-5}}$$

$$\frac{\underline{\underline{n \cdot x}}}{\frac{x+12}{2x+6}}$$

$$\frac{\underline{\underline{n \cdot x}}}{\frac{4}{x+12}}$$

Μια αλγεβρική παράσταση (π.χ. $\frac{x^3+4}{x-1}$, $\frac{xyw}{x+y}$, $\frac{2}{x^2+4}$) που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **ρητή παράσταση**. Οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή της, αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

$$\frac{\underline{\underline{n \cdot x}}}{\frac{2x+3}{x-5}}$$

Πρέπει $x-5 \neq 0$
 $x \neq 5$

για $x=10$

$$\frac{2 \cdot 10 + 3}{10 - 5} = \frac{23}{5}$$

για $x=1$

$$\frac{2 \cdot 1 + 3}{1 - 5} = \frac{5}{-4} = -\frac{4}{5}$$

για $x=0$

$$\frac{2 \cdot 0 + 3}{0 - 5} = -\frac{3}{5}$$

n.x

$$\frac{x+12}{2x+6}$$

Πρέπει $2x+6 \neq 0$
 $2x \neq -6$
 $x \neq -\frac{6}{2}$
 $x \neq -3$

n.x

$$\frac{4}{x+12}$$

Πρέπει $x+12 \neq 0$
 $x \neq -12$

1 Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $\frac{1}{x-4}$

β) $\frac{y+3}{2y-5}$

γ) $\frac{\omega-2}{(\omega+1)^2}$

δ) $\frac{6x+1}{x(x-3)}$

Σητφείηται ;

$$\frac{\cancel{x} + 2}{\cancel{x} + 5}$$

οχι αλω δει είναι γικίλω

2 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{4x}{6x}$

β) $\frac{3y^2}{12y}$

γ) $\frac{2x\omega^2}{8x^2\omega}$

δ) $\frac{5a^2\beta\gamma^3}{10a\beta^2\gamma}$

ε) $\frac{x+4}{4+x}$

στ) $\frac{y-1}{1-y}$

ζ) $\frac{\omega-2}{(2-\omega)^2}$

η) $\frac{(a-\beta)(\beta-\gamma)}{(\beta-a)(\gamma-\beta)}$

$$\alpha) \frac{4x}{6x} = \frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \frac{2}{3}$$

$$\sigma\tau) \frac{y-1}{1-y} = \frac{-(-y+1)}{1-\cancel{y}} = -1$$

$$\gamma) \frac{2x\omega^2}{8x^2\omega} = \frac{\omega}{4x}$$

2 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

~~α) $\frac{4x}{6x}$~~

~~β) $\frac{3y^2}{12y}$~~

~~γ) $\frac{2x\omega^2}{8x^2\omega}$~~

~~δ) $\frac{5a^2\beta\gamma^3}{10a\beta^2\gamma}$~~

~~ε) $\frac{x+4}{4+x}$~~

~~στ) $\frac{y-1}{1-y}$~~

~~ζ) $\frac{\omega-2}{(2-\omega)^2}$~~

~~η) $\frac{(a-\beta)(\beta-\gamma)}{(\beta-a)(\gamma-\beta)}$~~

3 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{6x}{2x^2+4x}$

β) $\frac{3y-9}{y^2-3y}$

γ) $\frac{x^2+x\omega}{\omega^2+x\omega}$

δ) $\frac{5a^2-20}{(a-2)^2}$

ε) $\frac{x^2-16}{x^2-4x}$

στ) $\frac{y^2-1}{y^2+2y+1}$

ζ) $\frac{6x^2+3x\omega}{4x^2-\omega^2}$

η) $\frac{a^2+a\beta+\beta^2}{a^3-\beta^3}$

2) β) $\frac{3y^2}{12y} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{y} \cdot y}{\cancel{3} \cdot 4 \cdot \cancel{y}} = \frac{y}{4}$

δ) $\frac{5a^2\beta\gamma^3}{10a\beta^2\gamma} = \frac{a \cdot \gamma^2}{2 \cdot \beta}$

ε) $\frac{x+4}{4+x} = 1$

ζ) $\frac{\omega-2}{(2-\omega)^2} = -\frac{(2-\omega)}{(2-\omega)^2} =$
 $= -\frac{1}{2-\omega}$

η) $\frac{(a-\epsilon)(\epsilon-\gamma)}{(\epsilon-a)(\gamma-\epsilon)} =$

$= \frac{(a-\epsilon)(\epsilon-\gamma)}{[-(a-\epsilon)][-(\epsilon-\gamma)]} =$
 $= \frac{(a-\epsilon)(\epsilon-\gamma)}{(a-\epsilon) \cdot (\epsilon-\gamma)} = 1$

2

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{4x}{6x}$

β) $\frac{3y^2}{12y}$

γ) $\frac{2x\omega^2}{8x^2\omega}$

δ) $\frac{5a^2\beta\gamma^3}{10a\beta^2\gamma}$

ε) $\frac{x+4}{4+x}$

στ) $\frac{y-1}{1-y}$

ζ) $\frac{\omega-2}{(2-\omega)^2}$

η) $\frac{(a-\beta)(\beta-\gamma)}{(\beta-a)(\gamma-\beta)}$

3

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{6x}{2x^2+4x}$

β) $\frac{3y-9}{y^2-3y}$

γ) $\frac{x^2+x\omega}{\omega^2+x\omega}$

δ) $\frac{5a^2-20}{(a-2)^2}$

ε) $\frac{x^2-16}{x^2-4x}$

στ) $\frac{y^2-1}{y^2+2y+1}$

ζ) $\frac{6x^2+3x\omega}{4x^2-\omega^2}$

η) $\frac{a^2+a\beta+\beta^2}{a^3-\beta^3}$

$$\zeta) \frac{5a^2-20}{(a-2)^2} = \frac{5(a^2-4)}{(a-2)^2} = \frac{5\cancel{(a-2)}(a+2)}{(a-2)^2} = \frac{5\cdot(a+2)}{(a-2)}$$

$$a) \frac{6x}{2x^2+4x} = \frac{6x}{2x\cdot(x+2)} = \frac{3}{x+2}$$

$$e) \frac{3y-9}{y^2-3y} = \frac{3(y-3)}{y(y-3)} = \frac{3}{y}$$

$$\delta) \frac{x^2+x\omega}{\omega^2+x\omega} = \frac{x(x+\omega)}{\omega(\omega+x)} = \frac{x}{\omega}$$

► Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο Παραστάσεων ✓

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

$$\underline{\underline{\text{π.χ}}}$$
$$2x^3y, \quad 4xy^4, \quad 6x^3y^3$$

$$\text{Ε.Κ.Π} = 12x^3y^4$$

$$3xy^4\omega, \quad 9x^4y\omega^3, \quad 6x$$

$$\text{Ε.Κ.Π} = 18x^4y^4\omega^3$$

1 Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $12x^3y^2\omega^2$, $18x^2y\omega^3$, $24x^2y^3\omega^4$

β) $15axy^3$, $10ax^2\omega^2$, $5y\omega^2$

γ) $2x^2(x+y)^2$, $3xy^3(x+y)^2$, $8x^2y(x-y)(x+y)$

2 Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $6(x^2 - y^2)$, $4(x - y)^2$, $12(x - y)^3$

β) $\alpha^2 - 3\alpha + 2$, $\alpha^2 - 4$, $\alpha^3 - 4\alpha$

γ) $\alpha^3 - \alpha^2$, $(\alpha^2 - \alpha)(\alpha^2 - 1)$, $\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha$

1) α)

$$\text{ΕΚΠ} = 72 x^3 y^3 \omega^4$$

$$\text{ε) ΕΚΠ} = 30 a x^2 y^3 \omega^2$$

$$\text{δ) ΕΚΠ} = 24 x^2 \cdot (x+y)^2 \cdot (x-y) \cdot y^3$$

1 Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $12x^3y^2\omega^2$, $18x^2y\omega^3$, $24x^2y^3\omega^4$

β) $15axy^3$, $10ax^2\omega^2$, $5y\omega^2$

γ) $2x^2(x+y)^2$, $3xy^3(x+y)^2$, $8x^2y(x-y)(x+y)$

2 Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $6(x^2 - y^2)$, $4(x - y)^2$, $12(x - y)^3$

β) $a^2 - 3a + 2$, $a^2 - 4$, $a^3 - 4a$

γ) $a^3 - a^2$, $(a^2 - a)(a^2 - 1)$, $a^3 - 2a^2 + a$

α) $6(x^2 - y^2) = 6(x - y)(x + y)$

$4(x - y)^2$

$12(x - y)^3$

$\text{ΕΚΠ} = 12 \cdot (x - y)^3 \cdot (x + y)$

e) $a^2 - 3a + 2 = a^2 - 2a - a + 2 =$
 $= a(a - 2) - (a - 2) =$
 $= \boxed{(a - 2)(a - 1)}$

$a^2 - 4 = \boxed{(a - 2)(a + 2)}$

$a^3 - 4a = a(a^2 - 4) = \boxed{a(a - 2)(a + 2)}$

$\text{ΕΚΠ} = a \cdot (a - 2)(a - 1)(a + 2)$

1 Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $12x^3y^2\omega^2$, $18x^2y\omega^3$, $24x^2y^3\omega^4$

β) $15\alpha\chi y^3$, $10\alpha x^2\omega^2$, $5y\omega^2$

γ) $2x^2(x+y)^2$, $3xy^3(x+y)^2$, $8x^2y(x-y)(x+y)$

2 Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $6(x^2 - y^2)$, $4(x - y)^2$, $12(x - y)^3$

β) $\alpha^2 - 3\alpha + 2$, $\alpha^2 - 4$, $\alpha^3 - 4\alpha$

γ) $\alpha^3 - \alpha^2$, $(\alpha^2 - \alpha)(\alpha^2 - 1)$, $\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha$

γ) $\alpha^3 - \alpha^2 = \boxed{\alpha^2(\alpha - 1)}$

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \alpha)(\alpha^2 - 1) &= \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 1)(\alpha + 1) \\ &= \boxed{\alpha(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^3 - 2a^2 + a &= a(a^2 - 2a + 1) = \\ &= \boxed{a(a - 1)^2}\end{aligned}$$

$$\text{ΕΚΠ} = a^2 \cdot (\alpha - 1)^2 \cdot (\alpha + 1)$$