

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

5

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

~~α. $(x+1)^3$~~

~~β. $(y+4)^3$~~

~~γ. $(2\alpha+1)^3$~~

~~δ. $(3\alpha+2\beta)^3$~~

~~ε. $(x^2+3)^3$~~

~~ζ. $(y^2+y)^3$~~

$$\begin{aligned} \text{a) } (x+1)^3 &= x^3 + 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 + 1^3 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (y+4)^3 &= y^3 + 3y^2 \cdot 4 + 3y \cdot 4^2 + 4^3 \\ &= y^3 + 12y^2 + 48y + 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ε) } (x^2+3)^3 &= (x^2)^3 + 3(x^2)^2 \cdot 3 + 3x^2 \cdot 3^2 + 3^3 \\ &= x^6 + 9x^4 + 27x^2 + 27 \end{aligned}$$

► Higher Surplus

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

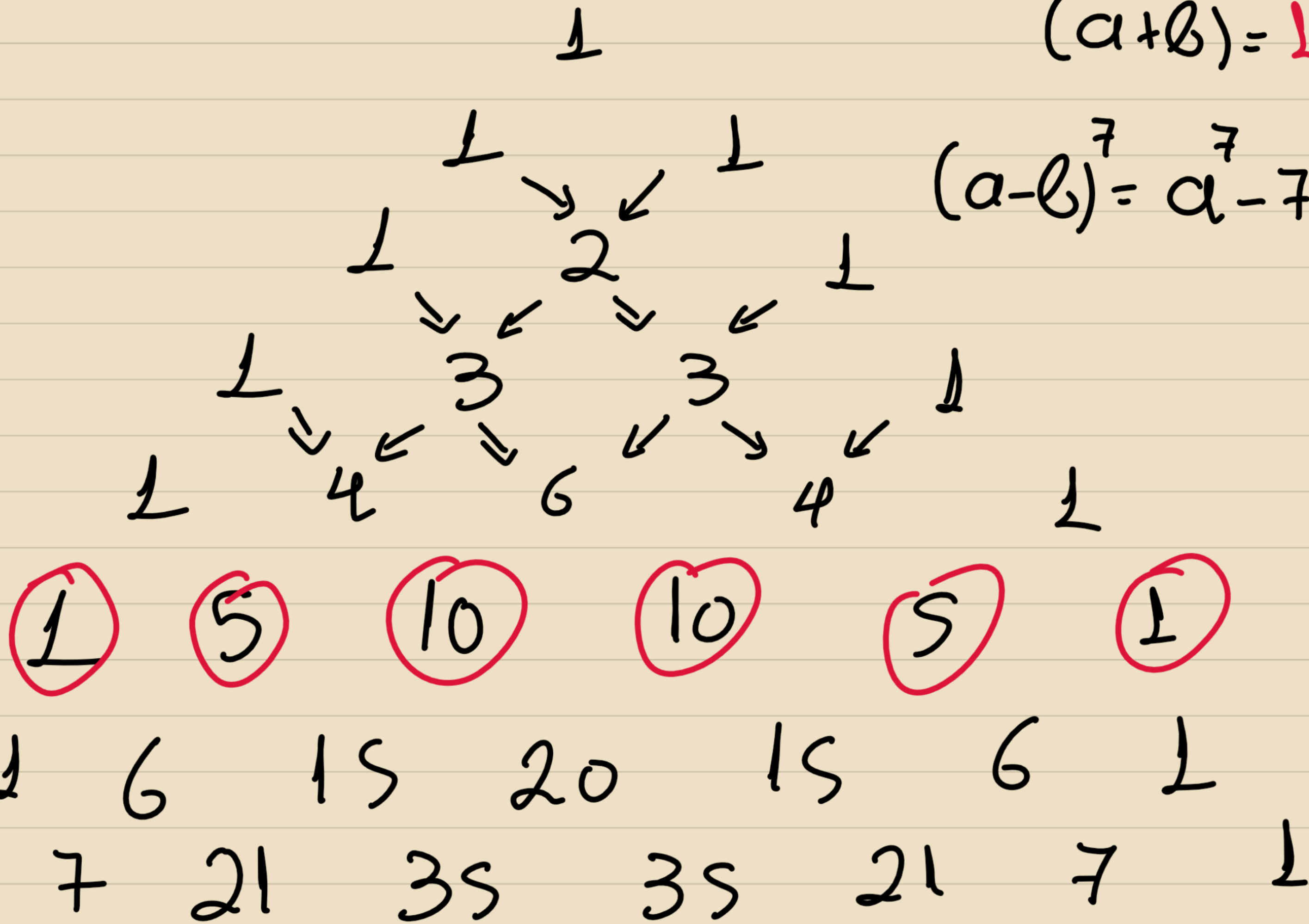
Ansatz

$$(a-b)^3 = (a-b) \cdot (a-b) \cdot (a-b) = (a-b)(a-b)^2 =$$

$$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3 =$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

► Trijewe zu Pascal



$$(a+b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

12 Να αποδείξετε ότι:

~~α.~~ $(x - 2y)^2 - (2x - y)^2 + 3x^2 = 3y^2$

β. $(\alpha - 3\beta)^2 + (3\alpha + 2\beta)(3\alpha - 2\beta) - (3\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$

γ. $(x - 1)(x + 1)^3 - 2x(x - 1)(x + 1) = x^4 - 1$

δ. $(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$

~~ε.~~ $(\alpha - 4)^2 + (2\alpha - 3)^2 = \alpha^2 + (2\alpha - 5)^2$

ζ. $(2x^2 + 2x)^2 + (2x + 1)^2 = (2x^2 + 2x + 1)^2$

$$a) (x - 2y)^2 - (2x - y)^2 + 3x^2 = 3y^2$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 - [(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot y + y^2] + 3x^2 = 3y^2$$

$$\cancel{x^2} - \cancel{4xy} + 4y^2 - \cancel{4x^2} + \cancel{4xy} - y^2 + \cancel{3x^2} = 3y^2$$

$$3y^2 = 3y^2 \quad \text{now is clear}$$

$$\eta. (x - 2)^3$$

$$\theta. (y - 5)^3$$

$$\iota. (3\alpha - 1)^3$$

$$\kappa. (2x - 3y)^3$$

$$\lambda. (y^2 - 2)^3$$

$$\mu. (\omega^2 - 2\omega)^3$$

12 Να αποδείξετε ότι:

~~α.~~ $(x - 2y)^2 - (2x - y)^2 + 3x^2 = 3y^2$

β. $(\alpha - 3\beta)^2 + (3\alpha + 2\beta)(3\alpha - 2\beta) - (3\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$

γ. $(x - 1)(x + 1)^3 - 2x(x - 1)(x + 1) = x^4 - 1$

δ. $(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$

~~ε.~~ $(\alpha - 4)^2 + (2\alpha - 3)^2 = \alpha^2 + (2\alpha - 5)^2$

ζ. $(2x^2 + 2x)^2 + (2x + 1)^2 = (2x^2 + 2x + 1)^2$

a) $(x - 2y)^2 - (2x - y)^2 + 3x^2 = 3y^2$

$$(x^2 - 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2) - ((2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot y + y^2) + 3x^2 = 3y^2$$

$$\cancel{x^2} - \cancel{4xy} + 4y^2 - \cancel{4x^2} + \cancel{4xy} - y^2 + \cancel{3x^2} = 3y^2$$
$$3y^2 = 3y^2$$

12 Να αποδείξετε ότι:

~~α.~~ $(x - 2y)^2 - (2x - y)^2 + 3x^2 = 3y^2$

β. $(\alpha - 3\beta)^2 + (3\alpha + 2\beta)(3\alpha - 2\beta) - (3\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$

γ. $(x - 1)(x + 1)^3 - 2x(x - 1)(x + 1) = x^4 - 1$

~~δ.~~ $(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$

~~ε.~~ $(\alpha - 4)^2 + (2\alpha - 3)^2 = \alpha^2 + (2\alpha - 5)^2$

ζ. $(2x^2 + 2x)^2 + (2x + 1)^2 = (2x^2 + 2x + 1)^2$

$$\delta) (a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 - b^2)^2$$

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$$

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$$

➤ Διαφορά τετράγωνων (SO5)

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Απόδειξη

$$(a - b)(a + b) = a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ba} - b^2 = a^2 - b^2 \quad \square$$

Π.χ

$$\cdot x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$\cdot 16x^2 - y^2 = (4x)^2 - y^2 = (4x - y)(4x + y)$$

$$\cdot 9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x - 5) \cdot (3x + 5)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$4x^2y^4 - 16 =$$

$$(2xy^2)^2 - 4^2 =$$

$$(2xy^2 - 4)(2xy^2 + 4)$$

6

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x - 1)(x + 1)$

β. $(y - 2)(y + 2)$

γ. $(3 - \omega)(3 + \omega)$

δ. $(x + 4)(4 - x)$

ε. $(x - y)(-x - y)$

ζ. $(-x + y)(-x - y)$

η. $(2x + 7y)(2x - 7y)$

θ. $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

ι. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$



$$\cdot \quad x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

$$\cdot \quad x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$$

$$\cdot \quad 4x^2 - 16 = (2x-4)(2x+4)$$

$$\cdot \quad x^2 - 3 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

12 Να αποδείξετε ότι:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

~~α.~~ $(x - 2y)^2 - (2x - y)^2 + 3x^2 = 3y^2$

β. $(\alpha - 3\beta)^2 + (3\alpha + 2\beta)(3\alpha - 2\beta) - (3\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$

γ. $(x - 1)(x + 1)^3 - 2x(x - 1)(x + 1) = x^4 - 1$

~~δ.~~ $(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$

~~ε.~~ $(\alpha - 4)^2 + (2\alpha - 3)^2 = \alpha^2 + (2\alpha - 5)^2$

ζ. $(2x^2 + 2x)^2 + (2x + 1)^2 = (2x^2 + 2x + 1)^2 \rightarrow (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$

β) $(\alpha - 3\beta)^2 + (3\alpha + 2\beta)(3\alpha - 2\beta) \stackrel{?}{=} (3\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$

$$\alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 3\beta + (3\beta)^2 + ((3\alpha)^2 - (2\beta)^2) \stackrel{?}{=} ((3\alpha)^2 - 2 \cdot 3\alpha \cdot \beta + \beta^2) =$$

$$\cancel{\alpha^2} - \cancel{6\alpha\beta} + 9\beta^2 + \cancel{9\alpha^2} - 4\beta^2 - \cancel{9\alpha^2} + \cancel{6\alpha\beta} - \beta^2 = \alpha^2 + 4\beta^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$$
$$\alpha^2 + 4\beta^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$$

▣ Παραγοντοποίηση 4

Ορισμός

Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται παραγοντοποίηση.

Τίτρεται ✓

$$\cdot 4 \cdot (x-3) = 4x - 12$$

$$\cdot x(x-3) = x^2 - 3x$$

$$\cdot 3x(2x+5) = 6x^2 + 15x$$

$$\cdot -x^2(x^3-5) = -x^5 + 5x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot 2x-10 = \underline{2} \cdot x - \underline{2} \cdot 5 = 2(x-5) \\ \cdot x^2+4x = \underline{x} \cdot x + 4 \cdot \underline{x} = x(x+4) \\ \cdot 12x-6 = 6(2x-1) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 12x - 6 &= \begin{cases} 2(6x-3) \xrightarrow{\text{red}} 2 \cdot (3 \cdot (2x-1)) = 6(2x-1) \\ 3(4x-2) \xrightarrow{\text{green}} 3 \cdot (2 \cdot (2x-1)) = 6 \cdot (2x-1) \\ 6 \cdot (2x-1) \\ 1 \cdot (12x-6) \end{cases}
 \end{aligned}$$

1 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3\alpha + 6\beta$

β) $2x - 8$

γ) $8\omega^2 + 6\omega$

δ) $-9x^2 - 6x$

ε) $8\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2$

στ) $2x^2 - 2xy + 2x$

ζ) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\beta$

η) $2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha^2\beta$

θ) $\sqrt{2}xy - \sqrt{18}y + \sqrt{8}y^2$

Λύση

$$\alpha) 3\alpha + 6\beta = 3 \cdot (\alpha + 2\beta)$$

$$\gamma) 8\omega^2 + 6\omega = 2\omega(4\omega + 3)$$

1

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

~~α) $3\alpha + 6\beta$~~

~~β) $2x - 8$~~

~~γ) $8\omega^2 + 6\omega$~~

~~δ) $-9x^2 - 6x$~~

~~ε) $8\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2$~~

~~στ) $2x^2 - 2xy + 2x$~~

~~ζ) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\beta$~~

~~η) $2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha^2\beta$~~

~~θ) $\sqrt{2}xy - \sqrt{18}y + \sqrt{8}y^2$~~

$$\theta) 2x - 8 = 2 \cdot (x - 4)$$

$$\varepsilon) 8a^2b + 4ab^2 = 4ab \cdot (2a + b)$$

$$\delta) -9x^2 - 6x = 3x \cdot (-3x - 2) \\ - 3x \cdot (3x + 2)$$

! Σημείωση: Μπορεί πάντα να λυγίσει και να
παραίτηται το -1 και να αλλάξει όλα
τα πρόσημα.

$$\underline{\underline{n.x}} \left. \begin{array}{l} \cdot 2x - 3 = -(-2x + 3) \\ \cdot -x + 7 = -(x - 7) \\ \cdot 2x + 1 = -(-2x - 1) \end{array} \right\} \cdot -2x - 3 = -(2x + 3)$$

n.x

$$x \cdot (x-3) - 4(3-x) = x \cdot (x-3) + 4(x-3) = (x-3)(x+4)$$

1 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

~~α) $3\alpha + 6\beta$~~

~~β) $2x - 8$~~

~~γ) $8\omega^2 + 6\omega$~~

~~δ) $-9x^2 - 6x$~~

~~ε) $8\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2$~~

~~στ) $2x^2 - 2xy + 2x$~~

~~ζ) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\beta$~~

~~η) $2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha^2\beta$~~

θ) $\sqrt{2}xy - \sqrt{18}y + \sqrt{8}y^2$

α) $2x - 2xy + 2x = 2x(x - y + 1)$

Σχόλιο: Αν λείπει τον κοινό παρὸντα δεν έχω
και α' το να λείπει λείπει το 1.

γ) $a^2b + ab^2 - ab = ab(a + b - 1)$

η) $2a^3 - 4a^2 + 6a^2b = 2a^2(a - 2 + 3b)$

Σχόλιο: Για τον κοινό παρὸντα απλοποιώ και παίρνω
τον Μ.Κ.Δ των 2, 4, 6.

n.x

$$12x^2 - 4x + 24 = 4(3x^2 - x + 6)$$

1 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3\alpha + 6\beta$

β) $2x - 8$

γ) $8\omega^2 + 6\omega$

δ) $-9x^2 - 6x$

ε) $8\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2$

στ) $2x^2 - 2xy + 2x$

ζ) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\beta$

η) $2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha^2\beta$

θ) $\sqrt{2} xy - \sqrt{18} y + \sqrt{8} y^2$