

§ Ταυτότητες (sos)

Ορισμός

Γενικά

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

π.χ

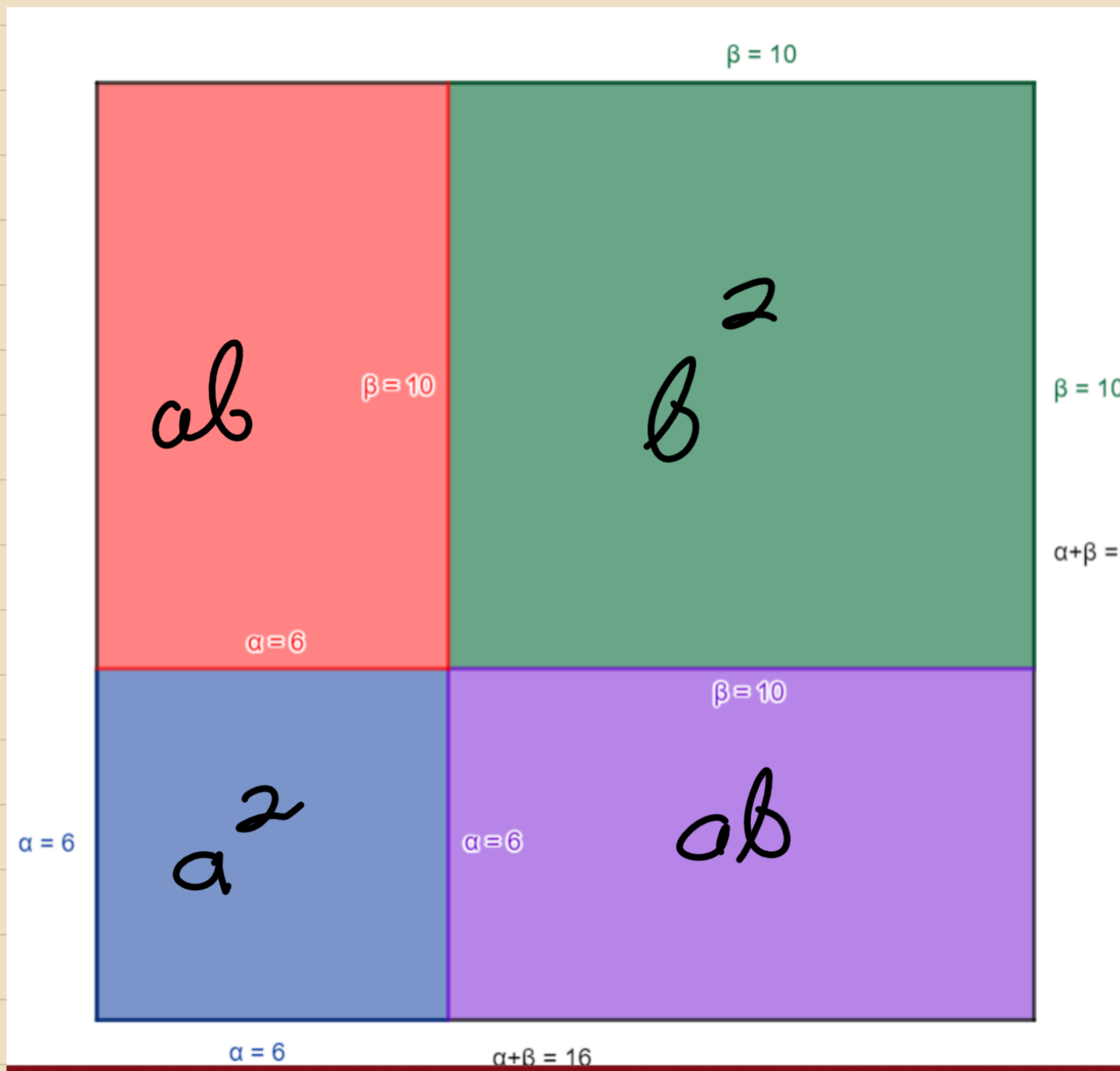
· $0 \cdot x = 0$

· $a \cdot 1 = a$

· $6 \cdot 2 = 2 \cdot 6$

· $y \cdot y = y^2$

· $a^0 = 1$ (δεν ισχύει για $a=0$)



► $\triangleq$ ταυτοτομία ◄

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ανάλυση

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b) \cdot (a+b) = \frac{a^2 + ab + ba + b^2}{=} \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

n.x

$$\begin{aligned} (x+2)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = \\ &= x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

(αυτόματα ταυτοτομίες)

Пример:

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$$

н.х

$$(1+3)^2 = 4^2 = 16$$

$$1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$$

$$(1+3)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3^2$$

$$4^2 = 1 + 6 + 9$$

$$16 = 16$$

1

1 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 2)^2$

β) $(y + 5)^2$

γ) $(2\omega + 1)^2$

δ) $(\kappa + 2\lambda)^2$

ε) $(3y + 2\beta)^2$

στ) $(x^2 + 1)^2$

ζ) $(y^2 + y)^2$

η) $(2x^2 + 3x)^2$

θ) $(x + \sqrt{2})^2$

ι) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$

ια) $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$

ιβ) $\left(\omega + \frac{4}{\omega}\right)^2$

► Αναπτύσσοντας τσζευχίνα (διαφορί)

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Απόδειξη

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \square$$

n.x

$$(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

2

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

α) $(x-3)^2$

β) $(y-5)^2$

γ) $(3\omega-1)^2$

δ) $(2\kappa-\lambda)^2$

ε) $(3y-2\beta)^2$

στ) $(x^2-2)^2$

ζ) $(y^2-y)^2$

η) $(2x^2-5x)^2$

θ) $(x-\sqrt{3})^2$

ι) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$

ια) $\left(a-\frac{3}{2}\right)^2$

ιβ) $\left(\omega-\frac{2}{\omega}\right)^2$

$$\alpha) (x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$\epsilon) (y-5)^2 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 5 + 5^2 = y^2 - 10y + 25$$

$$\gamma) (3\omega-1)^2 = (3\omega)^2 - 2 \cdot 3\omega \cdot 1 + 1^2 = 9\omega^2 - 6\omega + 1$$

$$\delta) (2\kappa-\lambda)^2 = (2\kappa)^2 - 2 \cdot 2\kappa \cdot \lambda + \lambda^2 = 4\kappa^2 - 4\kappa\lambda + \lambda^2$$

$$\epsilon) (3y-2\beta)^2 = (3y)^2 - 2 \cdot 3y \cdot 2\beta + (2\beta)^2 = 9y^2 - 12y\beta + 4\beta^2$$

2

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

α) $(x-3)^2$

β) $(y-5)^2$

γ) $(3\omega-1)^2$

δ) $(2\kappa-\lambda)^2$

ε) $(3\gamma-2\beta)^2$

στ) $(x^2-2)^2$

ζ) $(y^2-y)^2$

η) $(2x^2-5x)^2$

θ) $(x-\sqrt{3})^2$

ι) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$

ια) $\left(a-\frac{3}{2}\right)^2$

ιβ) $\left(\omega-\frac{2}{\omega}\right)^2$

$$\alpha) (x^2-2)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 2 + 2^2 = x^4 - 4x^2 + 4$$

$$\zeta) (y^2-y)^2 = (y^2)^2 - 2 \cdot y^2 \cdot y + y^2 = y^4 - 2y^3 + y^2$$

$$\delta\epsilon) 49 \text{ και } 3, 4$$

► Αναντιρρηση κλειου (αδ ποικτα)

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ανισειση

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

5 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x + 1)^3$

β. $(y + 4)^3$

γ. $(2\alpha + 1)^3$

δ. $(3\alpha + 2\beta)^3$

ε. $(x^2 + 3)^3$

ζ. $(y^2 + y)^3$

$$\begin{aligned} \delta) \quad (3\alpha + 2\beta)^3 &= (3\alpha)^3 + 3(3\alpha)^2 2\beta + 3 \cdot 3\alpha (2\beta)^2 + (2\beta)^3 \\ &= 27\alpha^3 + 3 \cdot 9\alpha^2 \cdot 2\beta + 3 \cdot 3\alpha \cdot 4\beta^2 + 8\beta^3 \\ &= 27\alpha^3 + 54\alpha^2\beta + 36\alpha\beta^2 + 8\beta^3. \end{aligned}$$

8)

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

12 Να αποδείξετε ότι:

α. $(x - 2y)^2 - (2x - y)^2 + 3x^2 = 3y^2$

β. $(\alpha - 3\beta)^2 + (3\alpha + 2\beta)(3\alpha - 2\beta) - (3\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$

γ. $(x - 1)(x + 1)^3 - 2x(x - 1)(x + 1) = x^4 - 1$

δ. $(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$

ε. $(\alpha - 4)^2 + (2\alpha - 3)^2 = \alpha^2 + (2\alpha - 5)^2$

ζ. $(2x^2 + 2x)^2 + (2x + 1)^2 = (2x^2 + 2x + 1)^2$

α)