

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4, \quad B = -(x-3) - 3(y-4) - [x(y-2) - y(x+3)].$$

Για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση: $A > B$.

1.

$$A = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4 = -\left[2^8 : 4^2 + 4^2\right] : 2^4$$

$$= -\left[2^8 : (2^2)^2 + 4^2\right] : 2^4 = -(2^8 : 2^4 + 4^2) : 2^4$$

$$= -(2^4 + 4^2) : 2^4 = -32 : 16 = -2.$$

$$B = -(x-3) - 3(y-4) - [x(y-2) - y(x+3)]$$

$$= -x + 3 - 3y + 12 - (xy - 2x - yx - 3y)$$

$$= -x - 3y + 15 - xy + 2x + xy + 3y = x + 15.$$

$$A > B \Leftrightarrow -2 > x + 15 \Leftrightarrow -x > 17 \Leftrightarrow x < -17.$$

Πρόβλημα 3

(α) Να αποδείξετε ότι, αν ένας φυσικός αριθμός είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο του ψηφίο ανήκει στο σύνολο $\Sigma = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

(β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $A = aaabb$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, ο οποίος είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, περιττός και διαιρείται με το 9.

3. (α) Από τον κανόνα πολλαπλασιασμού δύο φυσικών αριθμών έπεται ότι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου τους είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου των ψηφίων των μονάδων τους. Θεωρώντας τα τετράγωνα των μονοψήφιων φυσικών αριθμών διαπιστώνουμε ότι αυτά λήγουν σε 0, 1, 4, 5, 6, 9, οπότε το τελευταίο ψηφίο κάθε τετραγώνου φυσικού αριθμού ανήκει στο σύνολο $\Sigma = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

(β) Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα θα πρέπει $b \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ και αφού ο αριθμός είναι περιττός πρέπει $b \in \{1, 5, 9\}$.

Επειδή ο A διαιρείται με το 9 πρέπει να ισχύει ότι:

$$3a + 2b = \text{πολλαπλάσιο του } 9. \quad (1)$$

- Για $b = 1$ λαμβάνουμε $3a + 2 = \text{πολ.}9$, αδύνατο.
- Για $b = 5$ λαμβάνουμε $3a + 10 = \text{πολ.}9$, αδύνατο.
- Για $b = 9$ λαμβάνουμε $3a + 18 = \text{πολ.}9$, οπότε προκύπτει ότι $a \in \{3, 6, 9\}$. Άρα είναι $A = 33399$ ή $A = 66699$ ή $A = 99999$.