



ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΖΩΗ ΛΥΚΕΙΟ

ΤΑΞΗ: Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Αργυρούπολη, 16/04/2023

Παραγοντοποίηση τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$

Το τριώνυμο
 $ax^2 + bx + \gamma$,
 $a \neq 0$

- Αν $\Delta > 0$ η f έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 και γράφεται $ax^2 + bx + \gamma = a \cdot (x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2)$
- Αν $\Delta = 0$ η f έχει μια διπλή ρίζα ρ και παραγοντοποιείται $ax^2 + bx + \gamma = a \cdot (x - \rho)^2$
- Αν $\Delta < 0$ η f δεν έχει ρίζες και δεν παραγοντοποιείται.

Όταν θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ βρίσκουμε τη διακρίνουσά του και αν

- $\Delta > 0$ έχει 2 άνισες και πραγματικές ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ και παραγοντοποιείται $ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- $\Delta = 0$ έχει 1 διπλή και πραγματική ρίζα $x_0 = -\frac{b}{2a}$ και παραγοντοποιείται $ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_0)^2$.
- $\Delta < 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και δεν παραγοντοποιείται.

Λυμένα Παραδείγματα

1. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $-x^2 + 2x + 8$ β) $-4x^2 + 4x - 1$ γ) $2x^2 + x + 1$

Λύση

α) Έχουμε το τριώνυμο $-x^2 + 2x + 8$ με $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 36 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ και } x_2 = 4$$

Άρα το τριώνυμο παραγοντοποιείται: $-x^2 + 2x + 8 = -(x + 2)(x - 4)$

β) Έχουμε το τριώνυμο $-4x^2 + 4x - 1$ με $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1) = 0$

$$x_0 = \frac{-4}{2 \cdot (-4)} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \quad \text{οπότε η παραγοντοποίηση γίνεται:}$$

$$-4x^2 + 4x - 1 = -4 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2.$$

γ) Το τριώνυμο $2x^2 + x + 1$ έχει $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 < 0$ επομένως δεν παραγοντοποιείται.

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $ax^2 + (2a - 3)x - 6$, $a \neq 0$ **β) $x^2 - 3xy + 2y^2$**

γ) $x^2 - 3|x| - 10$ **δ) $x^2 - (2a + \beta)x + a(a + \beta)$**

Λύση

α) Η παράσταση $ax^2 + (2a - 3)x - 6$ είναι τριώνυμο με $A=a$, $B=2a-3$

και $\Gamma=-6$ οπότε παίρνουμε τη $\Delta = (2a - 3)^2 - 4 \cdot a \cdot (-6) =$

$$4a^2 - 12a + 9 + 24a = 4a^2 + 12a + 9 = (2a + 3)^2 \geq 0.$$

Άρα έχει πραγματικές ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{-(2a - 3) \pm \sqrt{(2a + 3)^2}}{2a} \Leftrightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{-2a + 3 \pm |2a + 3|}{2a} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2a + 3 \pm (2a + 3)}{2a} \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{a} \text{ και}$$

$$x_2 = -2.$$

Οπότε έχουμε: $ax^2 + (2a - 3)x - 6 = a \left(x - \frac{3}{a} \right) (x + 2) = (ax - 3)(x + 2)$

β) Ομοίως για το $x^2 - 3xy + 2y^2$ έχουμε $A=1$, $B=-3y$, $\Gamma=2y^2$

$$\Delta = (-3y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2y^2) = 9y^2 - 8y^2 = y^2 \geq 0 \text{ οπότε}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3y) \pm \sqrt{y^2}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3y \pm |y|}{2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3y \pm y}{2} \Leftrightarrow x_1 = 2y \text{ και}$$

$$x_2 = y.$$

Οπότε έχουμε: $x^2 - 3xy + 2y^2 = (x - 2y)(x - y).$

γ) Έχουμε το $x^2 - 3|x| - 10$ ισχύει όμως $x^2 = |x|^2$ άρα γίνεται

$|x|^2 - 3|x| - 10$. Θέτουμε $|x| = \omega$ οπότε έχουμε $\omega^2 - 3\omega - 10$ με

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49 > 0 \text{ με ρίζες } \omega_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$\omega_{1,2} = \frac{3 \pm 7}{2} \Leftrightarrow \omega_1 = 5 \text{ και } \omega_2 = -2.$$

Οπότε $|x|^2 - 3|x| - 10 = (|x| - 5)(|x| + 2).$

δ) Η παράσταση $x^2 - (2\alpha + \beta)x + \alpha(\alpha + \beta)$ είναι τριώνυμο με $A=1$, $B = -(2\alpha + \beta)$ και $\Gamma = \alpha(\alpha + \beta)$ οπότε έχουμε

$$\Delta = [-(2\alpha + \beta)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \alpha(\alpha + \beta) = 4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha^2 - 4\alpha\beta = \beta^2 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-[-(2\alpha + \beta)] \pm \sqrt{\beta^2}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{2\alpha + \beta \pm |\beta|}{2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{2\alpha + \beta \pm \beta}{2} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \alpha + \beta \text{ και } x_2 = \alpha.$$

$$\text{Οπότε έχουμε: } x^2 - (2\alpha + \beta)x + \alpha(\alpha + \beta) = (x - \alpha - \beta)(x - \alpha).$$

3. Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $\frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 - 7x + 6}$

β) $\frac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x^3 + 5x^2}$

γ) $\frac{x^2 + 2(\alpha - 1)x - 3\alpha(\alpha + 2)}{x^2 - (3\alpha + 2)x + 2\alpha(\alpha + 2)}$

Λύση

α) $\frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 - 7x + 6}$

Έχουμε το τριώνυμο $2x^2 - x - 3$ με $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 > 0$ και

ρίζες $x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2}$ δηλαδή $x_1 = \frac{3}{2}$ και $x_2 = -1$.

Επίσης έχουμε το $2x^2 - 7x + 6$ με $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 1 > 0$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow x_1 = 2 \text{ και } x_2 = \frac{3}{2}.$$

Οπότε η παράσταση γίνεται $\frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 - 7x + 6} = \frac{\cancel{2} \left(\cancel{x - \frac{3}{2}} \right) (x + 1)}{\cancel{2} \left(\cancel{x - \frac{3}{2}} \right) (x - 2)} = \frac{x + 1}{x - 2}.$

β) $\frac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x^3 + 5x^2} = \frac{x(x^2 + 3x - 10)}{x^2(x + 5)}$

Έχουμε το τριώνυμο $x^2 + 3x - 10$ με $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49 > 0$ με

ρίζες $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x_1 = 2 \text{ και } x_2 = -5.$

Οπότε η παράσταση γίνεται:

$$\frac{x(x^2 + 3x - 10)}{x^2(x + 5)} = \frac{x(x - 2)(\cancel{x + 5})}{x^2(\cancel{x + 5})} = \frac{x - 2}{x}.$$

$$\gamma) \frac{x^2 + 2(a-1)x - 3a(a+2)}{x^2 - (3a+2)x + 2a(a+2)}$$

Έχουμε $x^2 + 2(a-1)x - 3a(a+2)$ με

$$\Delta = [2(a-1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-3a(a+2)] \Leftrightarrow \Delta = 4a^2 - 8a + 4 + 12a^2 + 24a \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 16a^2 + 16a + 4 \Leftrightarrow \Delta = 4(4a^2 + 4a + 1) \Leftrightarrow \Delta = 4(2a+1)^2 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2(a-1) \pm \sqrt{4(2a+1)^2}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2a+2 \pm [2(2a+1)]}{2} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-2a+2 \pm (4a+2)}{2} \Leftrightarrow x_1 = a+2 \text{ και } x_2 = -3a.$$

Επίσης έχουμε $x^2 - (3a+2)x + 2a(a+2)$ με

$$\Delta = 9a^2 + 12a + 4 - 8a^2 - 16a \Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4a + 4 \Leftrightarrow \Delta = (a-2)^2 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-[-(3a+2)] \pm \sqrt{(a-2)^2}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3a+2 \pm |a-2|}{2} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{3a+2 \pm (a-2)}{2} \Leftrightarrow x_1 = 2a \text{ και } x_2 = a+2.$$

Οπότε η παράσταση γίνεται:

$$\frac{x^2 + 2(a-1)x - 3a(a+2)}{x^2 - (3a+2)x + 2a(a+2)} = \frac{\cancel{(x-a-2)}(x+3a)}{(x-2a)\cancel{(x-a-2)}} = \frac{x+3a}{x-2a}.$$

Πρόσημο τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$

Πρόσημο της
 $ax^2 + bx + \gamma$,
 $a \neq 0$

- Αν $\Delta > 0$ τότε έχει δύο άνισες ρίζες x_1, x_2 και το πρόσημο είναι:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α	$\begin{array}{c} \text{ετερόσημο} \\ \text{του α} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{ετερόσημο} \\ \text{του α} \end{array}$	ομόσημο του α

- Αν $\Delta = 0$ τότε έχει μια «διπλή» ρίζα τη $x = -\frac{\beta}{2a}$ και το πρόσημο είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2a}$	$+\infty$
$ax^2+bx+\gamma$	ομόσημο του α	0	ομόσημο του α

- Αν $\Delta < 0$ τότε δεν έχει ρίζες και το πρόσημο είναι:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2+bx+\gamma$	ομόσημο του α	

Λυμένα Παραδείγματα

1. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $x^2 + 3x - 10 < 0$

β) $x^2 - 10x + 25 > 0$

γ) $-x^2 + 3x < 4$

δ) $3 \geq 2x^2 + 5x$

Λύση

α) $f(x) = x^2 + 3x - 10$.

Το τριώνυμο $x^2 + 3x - 10$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49 > 0 \text{ και ρίζες } x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x_1 = -5 \text{ και}$$

$x_2 = 2$ άρα έχει πίνακα προσήμων

τιμές x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$	
$x^2+3x-10$	+	ϕ	-	ϕ	+

Επομένως έχουμε: $x^2 + 3x - 10 < 0 \Leftrightarrow x \in (-5, 2)$.

β) $f(x) = x^2 - 10x + 25$.

Το τριώνυμο $x^2 - 10x + 25$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$

άρα έχει μια διπλή ρίζα $x_0 = \frac{-(-10)}{2 \cdot 1} = 5$ και πίνακα προσήμων

τιμές x	$-\infty$	5	$+\infty$
$x^2-10x+25$	+	ϕ	+

Επομένως $x^2 - 10x + 25 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$.

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να βρούμε τη ρίζα και με παραγοντοποίηση αφού $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$ άρα $(x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

γ) $f(x) = -x^2 + 3x - 4$.

Το τριώνυμο $-x^2 + 3x - 4$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = -7 < 0 \text{ οπότε δεν έχει πραγματικές ρίζες και}$$

πίνακα προσήμου.

τιμές x	$-\infty$	$+\infty$
$-x^2+3x-4$	-	-

Άρα $-x^2 + 3x - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

δ) Η ανίσωση $3 \geq 2x^2 + 5x$ γίνεται $-2x^2 - 5x + 3 \geq 0$ οπότε το τριώνυμο $-2x^2 - 5x + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 49 > 0$ και

ρίζες $x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2(-2)}$ δηλαδή $x_1 = -3$ και $x_2 = \frac{1}{2}$ και πίνακα

προσήμου

τιμές x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$-2x^2-5x+3$	-	0	+	0	-

Άρα $-2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-3, \frac{1}{2}\right]$.

2. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $-x^2 + x + 20$ έχει θετικές τιμές και για ποιες αρνητικές.

Λύση

Το τριώνυμο $-x^2 + x + 20$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 20 = 81 > 0$

και ρίζες $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot (-1)}$ οπότε $x_1 = -4$ και $x_2 = 5$ οπότε ο πίνακας

προσήμου είναι

τιμές x	$-\infty$	-4	5	$+\infty$	
$-x^2+x+20$	-	0	+	0	-

Επομένως έχουμε:

$$-x^2 + x + 20 > 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 5)$$

$$-x^2 + x + 20 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (5, +\infty)$$

3. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $2x^2 \geq x + 3$ και $4 - x^2 \geq 0$.

Λύση

- Έχουμε την ανίσωση $2x^2 \geq x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 \geq 0$ της οποίας το τριώνυμο έχει $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2}$

δηλαδή $x_1 = \frac{3}{2}$ και $x_2 = -1$ και πίνακα προσήμου

τιμές x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$2x^2-x-3$	+	0	-	0	+

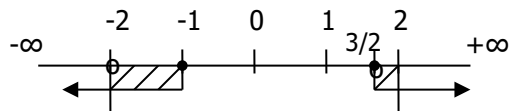
Άρα $x \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

- Ομοίως για την $4 - x^2 \geq 0$ έχουμε ρίζες $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$ οπότε ο πίνακας προσήμου είναι

τιμές x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$4-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα $x \in (-2, 2)$.

Επομένως



και οι κοινές λύσεις είναι: $x \in (-2, -1] \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right)$.

4. Ναλυθεί η ανίσωση: $-2x + 1 < 2x^2 - x \leq 1$.

Λύση

Η ανίσωση

$$-2x + 1 < 2x^2 - x \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 1 < 2x^2 - x \\ 2x^2 - x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 - x + 1 < 0 \\ 2x^2 - x - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Οπότε λύνουμε κάθε ανίσωση ξεχωριστά και στο τέλος συναληθεύουμε.

Η $-2x^2 - x + 1 < 0$ έχει $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 9$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-2)} \text{ δηλαδή } x_1 = -1 \text{ και } x_2 = \frac{1}{2} \text{ και πίνακα προσήμου}$$

τιμές x	$-\infty$	-1	1/2	$+\infty$	
$-2x^2-x+1$	-	0	+	0	-

Άρα $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

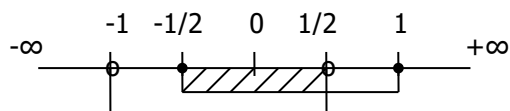
Ομοίως $2x^2 - x - 1 \leq 0$ έχει $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 > 0$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \text{ δηλαδή } x_1 = 1 \text{ και } x_2 = -\frac{1}{2} \text{ και πίνακα προσήμου}$$

τιμές x	$-\infty$	-1/2	1	$+\infty$	
$2x^2-x-1$	+	0	-	0	+

Άρα $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

Επομένως



οπότε οι κοινές λύσεις είναι $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

5. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ **β)** $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{-x^2 + 5x - 4}}$

γ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^4 + 2x^2 + 3}} - \sqrt{x^2 - 4}$

Λύση

α) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ πρέπει $x^2 - 7x + 10 \geq 0$

Το τριώνυμο $x^2 - 7x + 10$ έχει διακρίνουσα

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9 > 0$ άρα δύο άνισες και πραγματικές ρίζες τις

$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1}$ δηλαδή $x_1 = 5$ και $x_2 = 2$ οπότε ο πίνακας

προσήμου είναι

τιμές x	$-\infty$	2	5	$+\infty$	
$x^2-7x+10$	+	0	-	0	+

Άρα $D_f = (-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$.

β) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{-x^2 + 5x - 4}}$ πρέπει $-x^2 + 5x - 4 > 0$ οπότε το τριώνυμο

$-x^2 + 5x - 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 9 > 0$ και ρίζες

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)}$ δηλαδή $x_1 = 1$ και $x_2 = 4$ οπότε ο πίνακας προσήμου

είναι

τιμές x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$-x^2+5x-4$	-	0	+	0	-

Άρα $D_f = (1, 4)$.

γ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^4 + 2x^2 + 3}} - \sqrt{x^2 - 4}$ πρέπει $-x^4 - 2x^2 + 3 > 0$ (1) και

$x^2 - 4 \geq 0$ (2).

Η (1) είναι διτετράγωνη οπότε θέτω $\omega = x^2 > 0$ και έχω $-\omega^2 - 2\omega + 3$

με $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16 > 0$ με $\omega_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)}$.

Επομένως $\omega_1 = -3$ και $\omega_2 = 1$ με πίνακα προσήμου

τιμές ω	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$-\omega^2-2\omega+3$	-	0	+	0	-

Άρα $-\omega^2 - 2\omega + 3 > 0 \Leftrightarrow \omega \in (-3, 1)$ δηλαδή $-3 < \omega < 1$.

$$\text{Οπότε } -3 < x^2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > -3 \\ x^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ \sqrt{x^2} < \sqrt{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ |x| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

Άρα $\boxed{0 < x < 1}$ (1)

Επίσης πρέπει $x^2 - 4 > 0$ με διακρίνουσα $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16 > 0$

και ρίζες $x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$ δηλαδή $x_1 = 2$ και $x_2 = -2$.

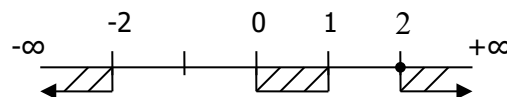
(Θα μπορούσαμε να βρούμε τις ρίζες παραγοντοποιώντας δηλαδή $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ άρα $x^2 - 4 = 0$ αν $(x - 2)(x + 2) = 0$ δηλαδή $x = 2$ ή $x = -2$)

Ο πίνακας προσήμου είναι

τιμές x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
x^2-4	+	0	-	0	+

Άρα $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \Leftrightarrow \boxed{x < -2 \text{ ή } x > 2}$ (2)

Πρέπει τώρα να γίνει συναλήθευση των λύσεων που βρήκαμε από την (1) και τη (2) οπότε έχουμε



Δηλαδή δεν υπάρχουν κοινές λύσεις άρα $D_f = \emptyset$.

6. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $(\lambda - 3)x^2 - 2(\lambda - 1)x + 2\lambda - 5 = 0$ με $\lambda \neq 3$ έχει:

α) δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) δεν έχει ρίζες πραγματικές.

Λύση

Η εξίσωση $(\lambda - 3)x^2 - 2(\lambda - 1)x + 2\lambda - 5 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = [-2(\lambda - 1)]^2 - 4(\lambda - 3)(2\lambda - 5) \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4(2\lambda^2 - 5\lambda - 6\lambda + 15) \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 8\lambda^2 + 20\lambda + 24\lambda - 60 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = -4\lambda^2 + 36\lambda - 56$$

α) Για να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει $\Delta > 0$ δηλαδή $-4\lambda^2 + 36\lambda - 56 > 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 9\lambda - 14 > 0$ το οποίο είναι ένα καινούριο

στο οποίο πρέπει να κάνω πίνακα προσήμου άρα έχω

$$\Delta' = 9^2 - 4(-1)(-14) = 25 \text{ με ρίζες } \lambda_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot (-1)} \text{ δηλαδή } \lambda_1 = 2 \text{ και}$$

$\lambda_2 = 7$ άρα ο πίνακας προσήμου είναι

τιμές λ	$-\infty$	2	7	$+\infty$	
$-\lambda^2+9\lambda-14$	-	0	+	0	-

Άρα η αρχική διακρίνουσα $\Delta = -\lambda^2 + 9\lambda - 14 > 0$ όταν $\lambda \in (2, 7)$ και επειδή $\lambda \neq 3$ έχουμε $\lambda \in (2, 3) \cup (3, 7)$ προκειμένου η εξίσωση να έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες.

β) Για να μην έχει πραγματικές πρέπει $\Delta < 0$ δηλαδή $-4\lambda^2 + 36\lambda - 56 < 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 9\lambda - 14 < 0$ του οποίου ο πίνακας προσήμου έχει γίνει στο (α) ερώτημα άρα $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$.

7. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $(\lambda - 2)x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Για την ανίσωση $(\lambda - 2)x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda + 1 > 0$ (1) έχουμε $a = \lambda - 2$.

Αν $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ τότε η (1) γίνεται $0x^2 + 3x + 3 > 0 \Leftrightarrow 3x + 3 > 0$ που δεν είναι θετική για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα πρέπει $\lambda \neq 2$ οπότε η (1) είναι ένα τριώνυμο για το οποίο ισχύει ότι θα είναι παντού θετικό αν έχει $a > 0$ και $\Delta < 0$. Δηλαδή

$$\begin{cases} \lambda - 2 > 0 \\ (\lambda + 1)^2 - 4 \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 2 \\ -3\lambda^2 + 6\lambda + 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 2 \\ \lambda^2 - 2\lambda - 3 > 0 \end{cases}$$

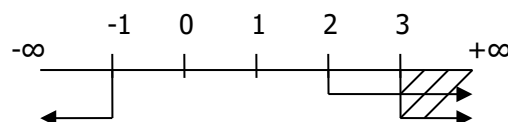
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \text{ άρα } \lambda_1 = 3 \text{ και } \lambda_2 = -1 \text{ και}$$

ο πίνακας προσήμου είναι

τιμές λ	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$\lambda^2-2\lambda-3$	+	0	-	0	+

$$\text{Άρα } \begin{cases} \lambda > 2 \\ \lambda < -1 \text{ ή } \lambda > 3 \end{cases}$$

Επομένως $\lambda \in (3, +\infty)$



8. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda - 1)x - 2 = 0$, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 < \lambda - 3$.

Λύση

- Έχουμε την εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x - 2 = 0$ για να έχει ρίζες πραγματικές θα πρέπει $\Delta \geq 0$.

$$\Delta = [-(\lambda - 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) \Leftrightarrow \Delta = (\lambda - 1)^2 + 8 > 0 \text{ άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες.}$$

- Υπολογίζουμε την παράσταση $x_1^2 + x_2^2$ με τη βοήθεια της ταυτότητας $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ και με τη βοήθεια των τύπων του Vieta.

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda - 1)}{1} = \lambda - 1$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (\lambda - 1)^2 - 2 \cdot (-2) = (\lambda - 1)^2 + 4$$

Επομένως έχουμε

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 < \lambda - 3 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 + 4 + 3(-2) < \lambda - 3 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4 - 6 < \lambda - 3 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 < 0$$

το τριώνυμο $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ έχει ρίζες $\lambda=1$ και $\lambda=2$ και έχουμε τον πίνακα

τιμές λ	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$\lambda^2-3\lambda+2$	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

Άρα $\lambda \in (1, 2)$.