



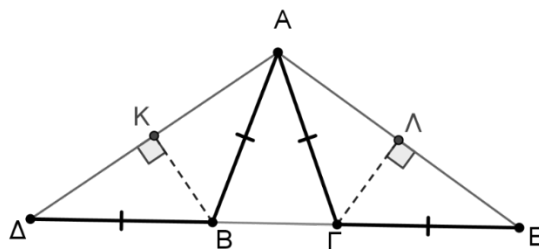
ΑΣΚΗΣΗ 1

Θεωρούμε τρίγωνα $AB\Delta$ με $AB = B\Delta = 5$ και $A\Gamma E$ με $A\Gamma = \Gamma E = 5$ έτσι ώστε τα σημεία Δ , B , Γ και E να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους BK και $\Gamma\Lambda$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ισοσκελή,
- τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα $K\Lambda$.



ΛΥΣΗ

α)

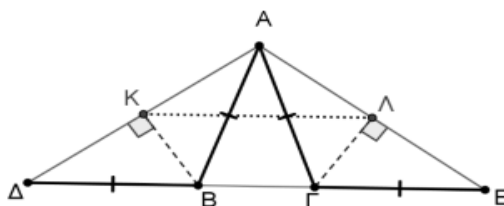
- Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ισοσκελή, γιατί είναι $AB = B\Delta$ και $A\Gamma = \Gamma E$, αντίστοιχα
- Το BK είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Delta$ που αντιστοιχεί στη βάση του $A\Delta$, άρα είναι και διάμεσος του τριγώνου, οπότε το K είναι μέσο του $A\Delta$.

Όμοια, το $\Gamma\Lambda$ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $A\Gamma E$ που αντιστοιχεί στη βάση του $A\Gamma$, άρα είναι και διάμεσός του, συνεπώς το Λ είναι μέσο του $A\Gamma$.

β) Είναι $AB + A\Gamma + B\Gamma = 12$. Όμως ισχύει $AB = B\Delta = A\Gamma = \Gamma E$, άρα $B\Delta + \Gamma E + B\Gamma = 12$.

Το τμήμα $K\Lambda$ ενώνει τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα του τριγώνου $A\Delta E$, άρα θα είναι ίσο με το μισό της τρίτης του πλευράς, της ΔE , δηλαδή:

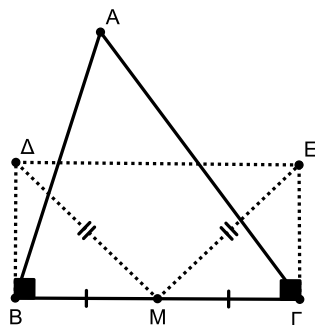
$$K\Lambda = \frac{\Delta E}{2} = \frac{B\Delta + \Gamma E + B\Gamma}{2} = \frac{12}{2} = 6$$



ΑΣΚΗΣΗ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, το M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, και τα τμήματα $B\Delta$ και $E\Gamma$ είναι κάθετα στη $B\Gamma$ στα σημεία B, Γ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα,
- β) το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και $M\Gamma E$ έχουν:

- $MB = M\Gamma$, διότι το M είναι μέσο του $B\Gamma$
- $M\Delta = ME$, από υπόθεση.

Άρα τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα γιατί ως ορθογώνια έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Επομένως θα έχουν ίσες και τις τρίτες τους πλευρές, δηλαδή θα είναι $B\Delta = \Gamma E$.

β) Τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE ανήκουν στις κάθετες στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, οπότε θα είναι κάθετα στη $B\Gamma$, άρα θα είναι παράλληλα μεταξύ τους ($B\Delta \parallel \Gamma E$) ως κάθετα τμήματα στην ίδια ευθεία $B\Gamma$. Επίσης από το α) ερώτημα ισχύει ότι $B\Delta = \Gamma E$.

Οπότε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις $B\Delta$ και ΓE , παράλληλες και ίσες άρα είναι παραλληλόγραμμο.

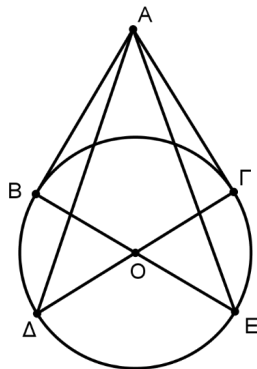
Επειδή είναι $\Delta B\Gamma = 90^\circ$, τότε το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι ορθογώνιο γιατί είναι παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω κύκλος (O, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο A . Από το A φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG του κύκλου και έστω E και Δ τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα.

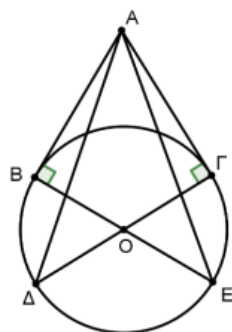
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα, β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ είναι ίσα.



ΛΥΣΗ

α) Είναι $\widehat{ABE} = \widehat{A\Gamma\Delta} = 90^\circ$, επειδή οι ακτίνες OB και OG που καταλήγουν στα σημεία επαφής B και Γ αντίστοιχα είναι κάθετες στις αντίστοιχες εφαπτομένες AB και AG .

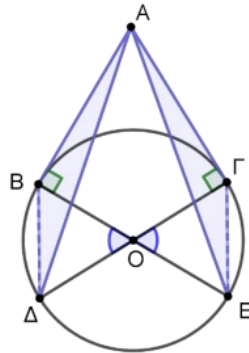


Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνια και έχουν:

- $AB = AG$, ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν
- $BE = \Gamma\Delta = 2\rho$

Άρα τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα, γιατί ως ορθογώνια έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

β) Φέρουμε τα τμήματα ΔΒ και ΕΓ.



Είναι $\widehat{BOD} = \widehat{GOE}$ ως κατακορυφήν γωνίες. Οι ίσες γωνίες $\widehat{BOD}$ και $\widehat{GOE}$ είναι και επίκεντρες, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα τους θα είναι ίσα, δηλαδή $\widehat{DB} = \widehat{GE}$, άρα και οι αντίστοιχες χορδές τους θα είναι ίσες, δηλαδή $DB = GE$ (1).

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABD και AGE , τα οποία έχουν:

- $AB = AG$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $AD = AE$, ως υποτεινουσες των ίσων τριγώνων ABE και AGD του α) ερωτήματος
- $DB = GE$, από σχέση (1)

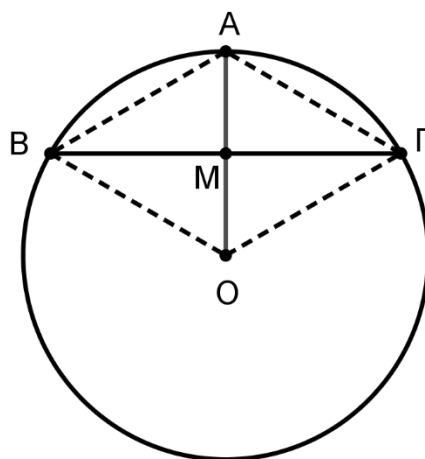
Οπότε τα τρίγωνα ABD και AGE είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε ακτίνα OA και χορδή $BΓ$ κάθετη στο μέσο της M .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AGOB$ είναι ρόμβος.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου $AGOB$.



α) Επειδή $B\Gamma \perp OA$, οπότε και $B\Gamma \perp OM$, τότε το OM είναι απόστημα της χορδής $B\Gamma$, άρα το M είναι μέσο της.

Από υπόθεση το M είναι μέσο και της OA , οπότε τα τμήματα OA και $B\Gamma$ του $ΑΓΟΒ$ διχοτομούνται. Άρα το $ΑΓΟΒ$ είναι παραλληλόγραμμο επειδή οι διαγώνιοί του OA , $B\Gamma$ διχοτομούνται.

Επιπλέον $OA \perp B\Gamma$, δηλαδή οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $ΑΓΟΒ$ είναι κάθετες. Άρα το $ΑΓΟΒ$ είναι ρόμβος.

β) Στο τρίγωνο BOA το τμήμα BM είναι ύψος ($B\Gamma \perp OA$ από δεδομένα) και διάμεσος ($B\Gamma \perp OA$ και M μέσο OA από δεδομένα), άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $BO = BA$.

Τότε $OA = BO = BA = \rho$, οπότε το τρίγωνο BOA είναι ισόπλευρο και επομένως:

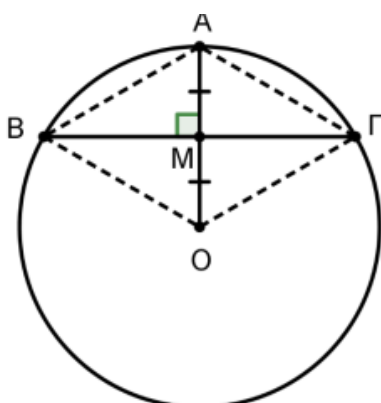
$$\widehat{BOA} = \widehat{BAO} = \widehat{OBA} = 60^\circ$$

Όμοια, το $ΓΜ$ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου $ΟΓΑ$, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $OA = OG = \rho$.

Τότε όμως $OA = OG = GA = \rho$, οπότε το τρίγωνο $ΟΓΑ$ είναι ισόπλευρο και επομένως:

$$\widehat{GOA} = \widehat{GAO} = \widehat{OGA} = 60^\circ$$

Είναι $\widehat{BO\Gamma} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ = \widehat{B\hat{A}\Gamma}$, επειδή $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{B\hat{A}\Gamma}$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου $ΑΓΟΒ$.

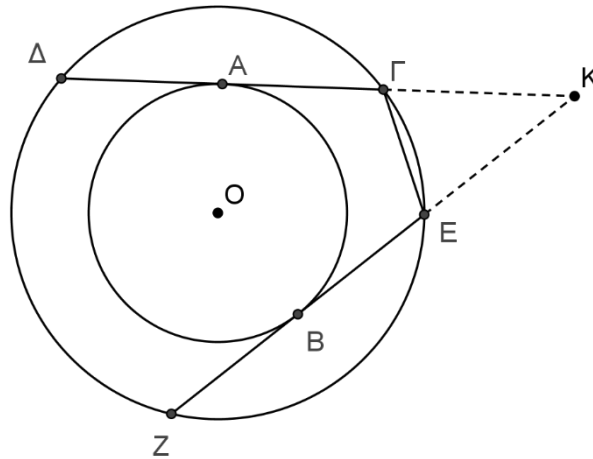


ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$.

β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΚΕΓ$ είναι ισοσκελές.



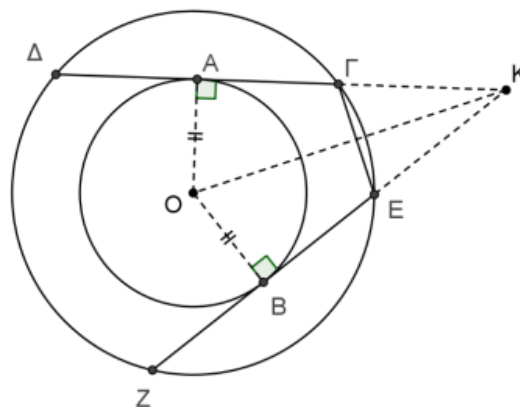
α) Φέρουμε τις ακτίνες OA και OB του κύκλου (O, r) που καταλήγουν στα σημεία επαφής A και B με τις εφαπτόμενες $\Delta\Gamma$ και ZE αντίστοιχα. Τότε $OA \perp \Delta\Gamma$ και $OB \perp ZE$.

Τα OA, OB είναι αποστήματα των χορδών $\Delta\Gamma$ και ZE αντίστοιχα στον κύκλο (O, R) και είναι ίσα αφού $OA = OB = r$. Άρα και οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE είναι ίσες.

β) Είναι $KA = KB$ (1) ως εφαπτόμενα τμήματα από το K προς τον κύκλο (O, r) . Επειδή τα OA και OB είναι αποστήματα των χορδών $\Delta\Gamma$ και ZE αντίστοιχα, τα σημεία A και B είναι μέσα των χορδών και επειδή οι χορδές είναι ίσες και τα μισά τους θα είναι ίσα, δηλαδή $AG = BE$ (2).

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2), δηλαδή $KA - AG = KB - BE$ οπότε $KG = KE$.

Άρα το τρίγωνο KGE είναι ισοσκελές.



ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και $\Delta B\Gamma$ ($\widehat{\Delta} = 90^\circ$) με τις κορυφές τους A και Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$ και το μέσο M της $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

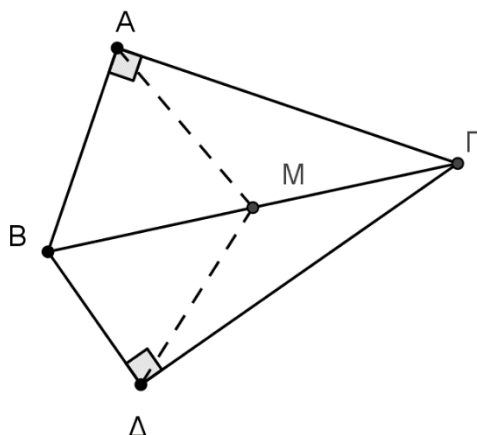
α) το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 9)

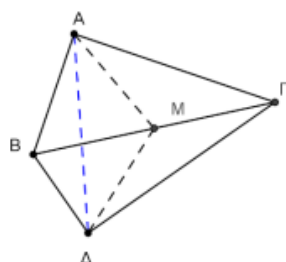
β) $\widehat{AM\Delta} = 2\widehat{A\Gamma\Delta}$,

(Μονάδες 9)

γ) τα Α, Β, Δ και Γ είναι σημεία ενός κύκλου, τον οποίο και να κατασκευάσετε.



ΛΥΣΗ



α) Το τμήμα ΑΜ είναι διάμεσος του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

Όμοια, το τμήμα ΔΜ είναι διάμεσος του ορθογώνιου τριγώνου ΒΔΓ, που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $AM = \Delta M$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$ (1) το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι $\widehat{M\hat{A}\Gamma} = \widehat{M\hat{\Gamma}A}$ (2)

Επειδή $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$ (3) το τρίγωνο ΔΜΓ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι $\widehat{M\hat{\Delta}\Gamma} = \widehat{M\hat{\Gamma}\Delta}$ (4)

Η γωνία $\widehat{A\hat{M}B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΓ, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, οπότε σε συνδυασμό με τη σχέση (2) έχουμε:

$$\widehat{A\hat{M}B} = \widehat{M\hat{A}\Gamma} + \widehat{M\hat{\Gamma}A} \text{ ή } \widehat{A\hat{M}B} = 2\widehat{M\hat{\Gamma}A} \quad (4)$$

Η γωνία $\widehat{B\hat{M}\Delta}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΓ, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, οπότε σε συνδυασμό με τη σχέση (4) έχουμε

$$\widehat{BMD} = \widehat{MD\Gamma} + \widehat{M\Gamma\Delta} \text{ ή } \widehat{BMD} = 2\widehat{M\Gamma\Delta} \text{ (5)}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (4), (5) και βρίσκουμε

$$\widehat{AMB} + \widehat{BMD} = 2\widehat{M\Gamma A} + 2\widehat{M\Gamma\Delta} \text{ ή } \widehat{AMD} = 2\widehat{A\Gamma\Delta}$$

γ) Το M είναι μέσο της BΓ, άρα $MB = M\Gamma$. Όμως $AM = M\Gamma$ από (1) και $\Delta M = M\Gamma$ από (3), άρα $MB = M\Gamma = MA = \Delta M$. Οπότε τα σημεία A, B, Γ και Δ ισαπέχουν από το σημείο M, άρα θα βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το μέσο M της BΓ.

