



ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΖΩΗ ΛΥΚΕΙΟ

ΤΑΞΗ: Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: _____ Αργυρούπολη, 8/3/2023

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

ΘΕΩΡΙΑ

❖ Ορισμός

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

❖ Ιδιότητες των παραλληλόγραμμων

- Έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες.
- Έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.
- Οι διαγώνιές του διχοτομούνται.
- Το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι κέντρο συμμετρίας του.

❖ Κριτήρια παραλληλόγραμμων

- Αν ένα τετράπλευρο έχει τις απέναντι γωνίες ανά δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.
- Αν ένα τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές ανά δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.
- Αν ένα τετράπλευρο έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες μεταξύ τους, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο.
- Αν σ' ένα τετράπλευρο οι διαγώνιες διχοτομούνται, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

❖ Είδη παραλληλογράμμων

- Κάθε παραλληλόγραμμο με μια τουλάχιστο γωνία ορθή, ονομάζεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- Κάθε παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ονομάζεται ρόμβος.
- Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που είναι και ρόμβος ονομάζεται τετράγωνο.

❖ Ιδιότητες ορθογωνίου

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

❖ Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.
- (ii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
- (iii) Έχει τρεις γωνίες ορθές.
- (iv) Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

❖ **Ιδιότητες του ρόμβου**

- (i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
- (ii) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

❖ **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος**

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Έχει **όλες** τις πλευρές του **ίσες**.
- (ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και **δύο διαδοχικές** πλευρές του είναι **ίσες**.
- (iii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι διαγώνιοί του τέμνονται **κάθετα**.
- (iv) Είναι **παραλληλόγραμμο** και μία διαγώνιός του **διχοτομεί** μία γωνία του.

❖ **Ιδιότητες τετραγώνου**

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:

- (i) Οι **απέναντι** πλευρές του είναι **παράλληλες**.
- (ii) **Όλες** οι πλευρές του είναι **ίσες**.
- (iii) **Όλες** οι γωνίες του είναι **ορθές**.
- (iv) Οι διαγώνιοί του είναι **ίσες**, τέμνονται **κάθετα**, **διχοτομούνται** και **διχοτομούν** τις γωνίες του.

❖ **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο**

Για να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι **τετράγωνο**, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι **ορθογώνιο** και **ρόμβος**. Αποδεικνύεται ότι ένα **παραλληλόγραμμο** είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
- (iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
- (iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
- (vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- (i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- (iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη των i), ii)

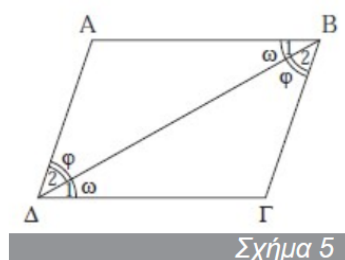
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$ (σχ. 5). Έχουμε:

$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).

$B\Delta$ κοινή πλευρά.

$\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).

Άρα τα τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$. Επίσης έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi + \omega$.



Σχήμα 5

Απόδειξη της ιδιότητας iii)

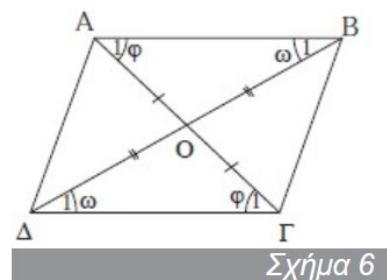
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAB , $O\Gamma\Delta$. Έχουμε:

$AB = \Gamma\Delta$

$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).

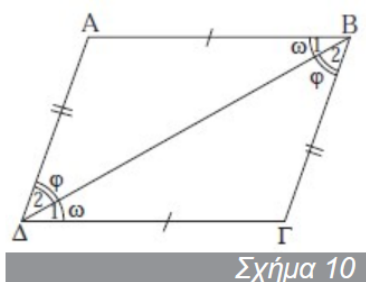
$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).

Άρα, τα τρίγωνα OAB , $O\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$.



Σχήμα 6

- (i) Οι απέναντι πλευρές ανά δυο είναι ίσες.
- (ii) Δυο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
- (iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δυο είναι ίσες.
- (iv) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται



Σχήμα 10

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

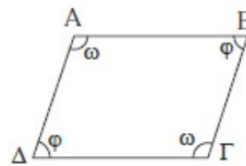
Θεωρούμε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Για να αποδείξουμε τα κριτήρια, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση, οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι παράλληλες.

(i) Έστω $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$ (σχ. 10). Αν φέρουμε τη διαγώνιο $B\Delta$, τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ που είναι ίσα, γιατί $AB = \Gamma\Delta$, $A\Delta = B\Gamma$ και $B\Delta$ κοινή πλευρά. Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$, οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

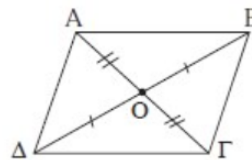
(ii) Έστω $AB \parallel \Gamma\Delta$ (σχ.10). Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα, γιατί $AB = \Gamma\Delta$, $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και η $B\Delta$ είναι κοινή πλευρά. Επομένως, όμοια με το (i), το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(iii) Αν $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \omega$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi$ (σχ. 11) η σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 4\angle$ γράφεται $2\omega + 2\varphi = 4\angle$ ή $\varphi + \omega = 2\angle$. Επομένως, έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\angle$, οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{A} + \hat{B} = 2\angle$, οπότε $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(iv) Έστω $AO = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$ (σχ.12). Τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$, καθώς και τα τρίγωνα $AO\Delta$ και $BO\Gamma$ είναι ίσα. Επομένως, όμοια με το (i), θα είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 11



Σχήμα 12

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 2

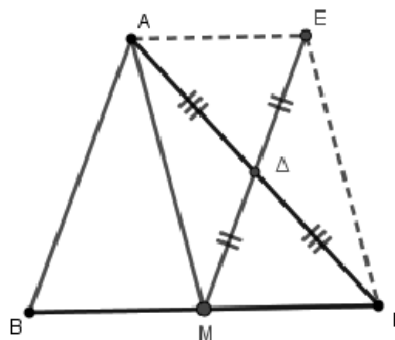
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = DE$.

Να αποδείξετε ότι:

- το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο,
- η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM .

ΛΥΣΗ

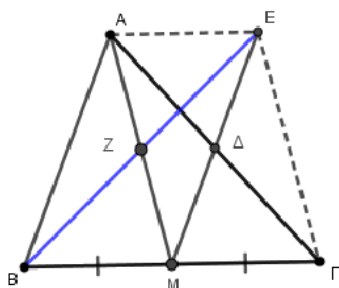
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, AM διάμεσός του στην πλευρά του $B\Gamma$, $M\Delta$ η διάμεσος στην πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου $AM\Gamma$ και σημείο E στην προέκτασή της $M\Delta$ προς το Δ τέτοιο ώστε $M\Delta = DE$.



α) Στο τετράπλευρο $AM\Gamma E$ τα $A\Gamma$, ME είναι διαγώνιοί του.

Επειδή είναι $M\Delta = DE$ (υπόθεση) και $A\Delta = D\Gamma$ αφού η $M\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου $AM\Gamma$, έχουμε ότι στο τετράπλευρο $AM\Gamma E$ οι διαγώνιοί του ME , $A\Gamma$ διχοτομούνται στο Δ . Άρα το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο με κέντρο το Δ .

β)



Επειδή το AMΓΕ είναι παραλληλόγραμμο θα ισχύει ότι οι απέναντι πλευρές του θα είναι ίσες και παράλληλες, δηλαδή $AE = MΓ$ και $AE \parallel MΓ$.

Επειδή είναι $AE \parallel MΓ$ και τα σημεία Β, Μ, Γ είναι συνευθειακά, τότε θα είναι $AE \parallel BM$.

Επειδή είναι $AE = MΓ$ και $MΓ = MB$, αφού η AM είναι διάμεσος του τριγώνου ABΓ (υπόθεση), τότε θα είναι $AE = BM$.

Οπότε, το τετράπλευρο AEMB είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δυο απέναντι πλευρές του, τις AE και BM, παράλληλες και ίσες.

ΘΕΜΑ 2

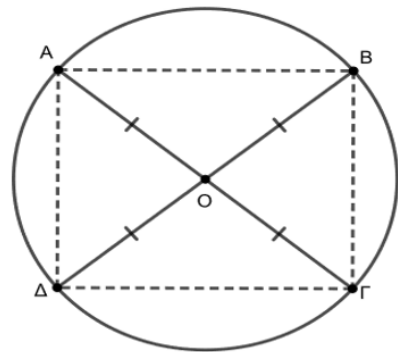
Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ορθογώνιο.

β) Τί είδους γωνία σχηματίζουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ αν το ABΓΔ είναι τετράγωνο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Αν ρ η ακτίνα του κύκλου τότε: $OA = OB = OG = OD = \rho$. Οπότε οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται και είναι ίσες αφού $ΑΓ = ΒΔ = 2\rho$, άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

β) Αν το ABΓΔ είναι τετράγωνο, τότε οι διαγώνιοί του είναι επιπλέον κάθετες μεταξύ τους. Άρα οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ σχηματίζουν ορθή γωνία.

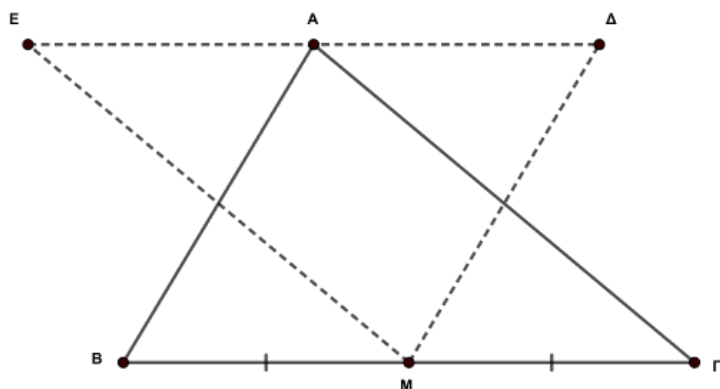


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την ΒΑ και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη ΒΓ και το σημείο Α). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα ΑΔΜΒ και ΑΓΜΕ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 12)

β) $ΔΑ=ΑΕ$. (Μονάδες 13)



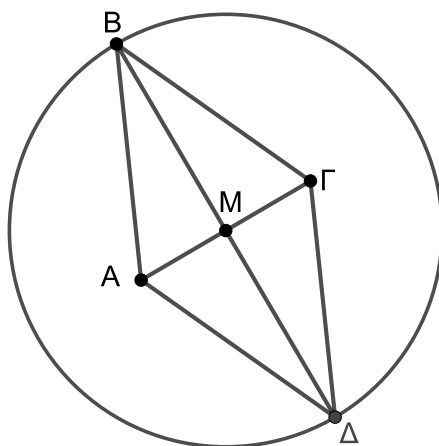
α) Το τετράπλευρο ΑΔΜΒ έχει $AB = DM$ (από υπόθεση) και $AB \parallel DM$ (από υπόθεση) άρα είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει 2 απέναντι πλευρές του, τις ΑΒ και ΜΔ παράλληλες και ίσες.

Το τετράπλευρο ΑΓΜΕ έχει $AG = EM$ (από υπόθεση) και $AG \parallel EM$ (από υπόθεση) άρα είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει 2 απέναντι πλευρές του, τις ΑΓ και ΕΔ παράλληλες και ίσες.

β) $DA=BM$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΔΜΒ (που δείξαμε στο ερώτημα α)), επίσης $AE=GM$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΓΜΕ (που δείξαμε στο ερώτημα α)). Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ επομένως $BM=GM$. Τελικά έχουμε $DA=AE$.

ΘΕΜΑ 4

α) Στο σχήμα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο Μ. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.



β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.

Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετράπλευρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

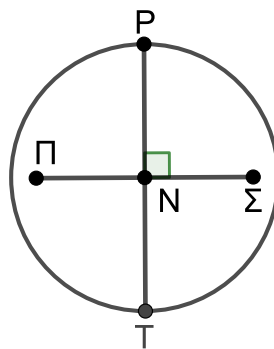
Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετράπλευρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

γ) Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα PT και $ΠΣ$ τέμνονται κάθετα στο N και $ΠN = NΣ$.

Επίσης η PT είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το N .

Να αποδείξετε ότι $ΠP = PΣ = ΣT = TΠ$.



ΛΥΣΗ

α) Η $ΒΔ$ είναι μεσοκάθετος της $ΑΓ$ από την υπόθεση, άρα ισχύει $ΑΜ = ΜΓ$.

Επιπλέον $ΒΜ = ΜΔ$, γιατί από την υπόθεση το $Μ$ είναι κέντρο του κύκλου με διάμετρο $ΒΔ$. Επομένως, οι διαγώνιοι του $ΑΒΓΔ$ διχοτομούνται. Άρα το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

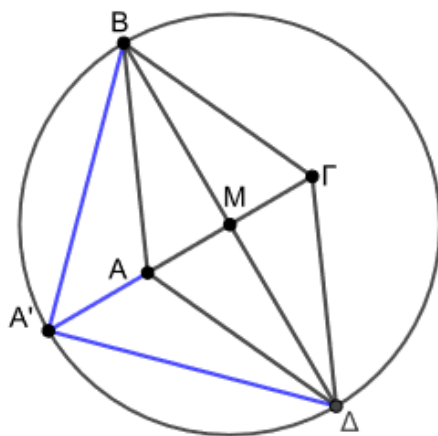
Ακόμα οι $ΒΔ$ και $ΑΓ$ είναι κάθετες, γιατί η $ΒΔ$ είναι μεσοκάθετος της $ΑΓ$ από την υπόθεση.

Εφόσον οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ είναι κάθετες το $ΑΒΓΔ$ είναι ρόμβος.

β) Η Πρόταση 1 έχει αποδειχθεί στο ερώτημα α), άρα είναι αληθής.

Η Πρόταση 2 είναι ψευδής.

Στο παραπάνω σχήμα προεκτείνουμε την ΑΓ προς το μέρος του Α κατά ΑΑ', ώστε το Α' να είναι σημείο του κύκλου.



Το τετράπλευρο Α'ΒΓΔ πληροί τις υποθέσεις της Πρότασης 2. Ωστόσο δεν είναι παραλληλόγραμμο καθώς οι διαγώνιοι του Α'Γ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται στο Μ δε

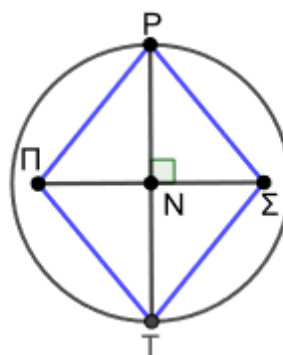
διχοτομούνται, γιατί $A'M > MΓ$ (η Α'Μ είναι διάμετρος του κύκλου, ενώ το Γ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου). Αν ήταν παραλληλόγραμμο, τότε οι διαγώνιοί του θα διχοτομούνταν. Επομένως, εφόσον δεν είναι παραλληλόγραμμο, τότε δεν είναι και ρόμβος.

γ) Σχεδιάζουμε το τετράπλευρο ΠΡΣΤ.

Η διαγώνιος του ΡΤ είναι μεσοκάθετος της ΠΣ, εφόσον είναι κάθετες και $ΠΝ = ΝΣ$, από την υπόθεση.

Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου που έχει ως κέντρο το Ν, σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου.

Άρα από την Πρόταση 1 (του ερωτήματος β)) που αποδείχθηκε στο α) το ΠΡΣΤ είναι ρόμβος. Συνεπώς έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Δηλαδή $ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ$.

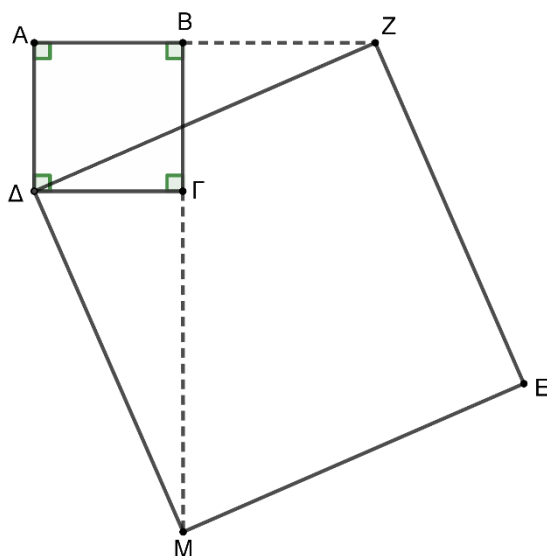


ΘΕΜΑ 4

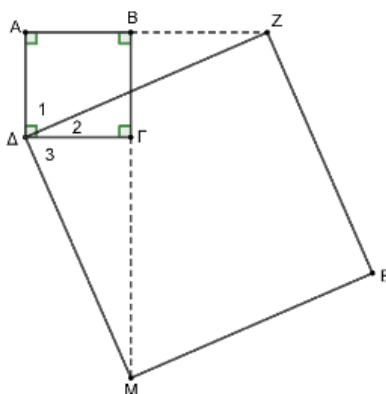
Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το B κατά τμήμα BZ και την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma M = AZ$. Θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔMEZ να είναι παραλληλόγραμμο.

Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $\Gamma\Delta M$ είναι ίσα και οι γωνίες $\widehat{A\Delta Z}$ και $\widehat{\Gamma\Delta M}$ είναι ίσες, (Μονάδες 9)
- β) το τετράπλευρο ΔMEZ είναι τετράγωνο, (Μονάδες 9)
- γ) οι γωνίες $\widehat{B\hat{Z}E}$ και $\widehat{E\hat{M}B}$ είναι παραπληρωματικές. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ



α) Για τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta\Delta Z$ και $\Gamma\Delta M$ έχουμε:

- $\Delta\Delta = \Delta\Gamma$, ως πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$
- $\Delta Z = \Gamma M$, από τα δεδομένα

Άρα έχουν μία προς μία ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε είναι ίσα.

Αν $\widehat{\Delta\Delta Z} = \widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{\Gamma\Delta M} = \widehat{\Delta}_3$, τότε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_3$ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΔZ και ΓM των ίσων τριγώνων $\Delta\Delta Z$ και $\Gamma\Delta M$.

β) Από την υπόθεση έχουμε ότι το τετράπλευρο $\Delta M E Z$ να είναι παραλληλόγραμμο.

Για να είναι το $\Delta M E Z$ τετράγωνο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Είναι $\widehat{M\Delta Z} = \widehat{\Delta}_2 + \widehat{\Delta}_3$, όμως $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_3$ από α) ερώτημα, οπότε $\widehat{M\Delta Z} = \widehat{\Delta}_2 + \widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta\Delta\Gamma} = 90^\circ$. Συνεπώς το παραλληλόγραμμο $\Delta M E Z$ είναι και ορθογώνιο διότι έχει μία ορθή γωνία.

Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta\Delta Z$ και $\Gamma\Delta M$ είναι ίσα (ερώτημα α), θα έχουν και τις υποτείνουσες αντίστοιχα ίσες, δηλαδή $\Delta Z = \Delta M$. Άρα το ορθογώνιο $\Delta M E Z$ είναι και ρόμβος, διότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες. Συνεπώς το $\Delta M E Z$ είναι τετράγωνο.

γ) Από το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = 90^\circ$ άρα και $\widehat{M\hat{B}Z} = 90^\circ$ ως παραπληρωματική της.

Από το τετράγωνο $\Delta M E Z$ έχουμε $\widehat{Z\hat{E}M} = 90^\circ$. Άρα $\widehat{M\hat{B}Z} + \widehat{Z\hat{E}M} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Για τις γωνίες του τετραπλεύρου $BZEM$ ισχύει ότι:

$$\widehat{B\hat{Z}E} + \widehat{Z\hat{E}M} + \widehat{E\hat{M}B} + \widehat{M\hat{B}Z} = 360^\circ \text{ ή } \widehat{B\hat{Z}E} + \widehat{E\hat{M}B} + 180^\circ = 360^\circ \text{ ή } \widehat{B\hat{Z}E} + \widehat{E\hat{M}B} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

Άρα οι γωνίες $\widehat{B\hat{Z}E}$ και $\widehat{E\hat{M}B}$ είναι παραπληρωματικές.