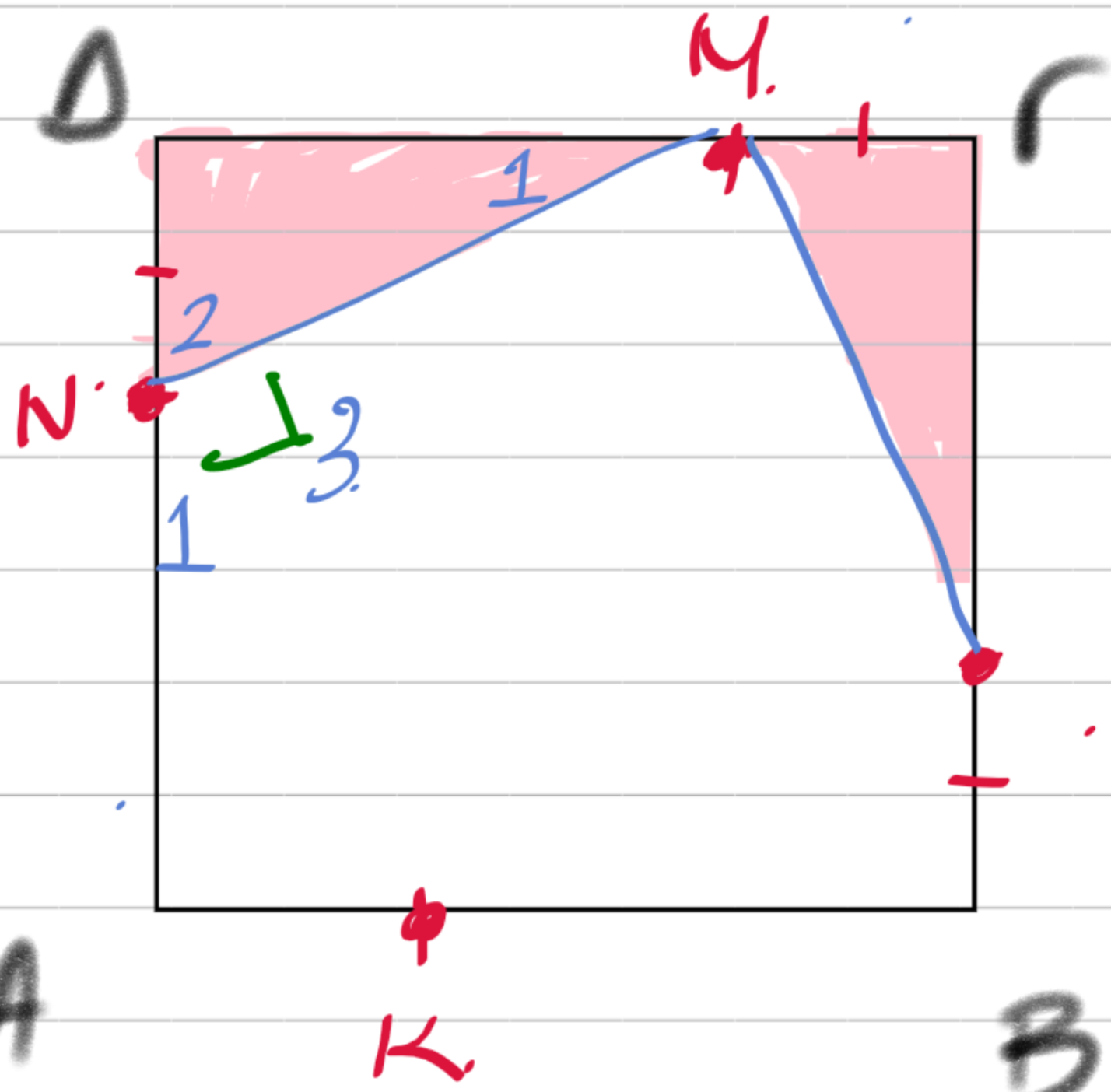


6. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις πλευρές AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA παίρνουμε σημεία K , Λ , M και N αντίστοιχα τέτοια, ώστε $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N$. Να αποδείξετε ότι το $K\Lambda M N$ είναι τετράγωνο.

6εξ109 / Εμπέδωση

Δεδομένα $AB\Gamma\Delta$ τετράγωνο
 $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N$

Ζητούμενα. $K\Lambda M N$ τετράγωνο



Συγκρίνω ΔNM , $\Delta \Lambda E$, $\Delta K B$, $\Delta \Gamma M$

• $\Delta N = \Delta E = \Delta B \Lambda = \Delta M$

• ορθογώνια

$M = AN = BK = \Gamma \Lambda$ (ως διαφορά ίσων πλευρών)

Αρα

τα τρίγωνα ίσα. οπότε $MN = NK = K\Lambda = \Lambda M$

οπότε

$K\Lambda M N$ ρόμβος (θα δείξω ότι έχει $1\angle$)

$$\begin{aligned} \hat{N}_1 + \hat{N}_2 + \hat{N}_3 &= 180^\circ \\ \hat{D} + \hat{M}_1 + \hat{N}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N}_1$$

$$\hat{D} + \hat{N}_1 + \hat{N}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{N}_1 + \hat{N}_2 = 90^\circ$$

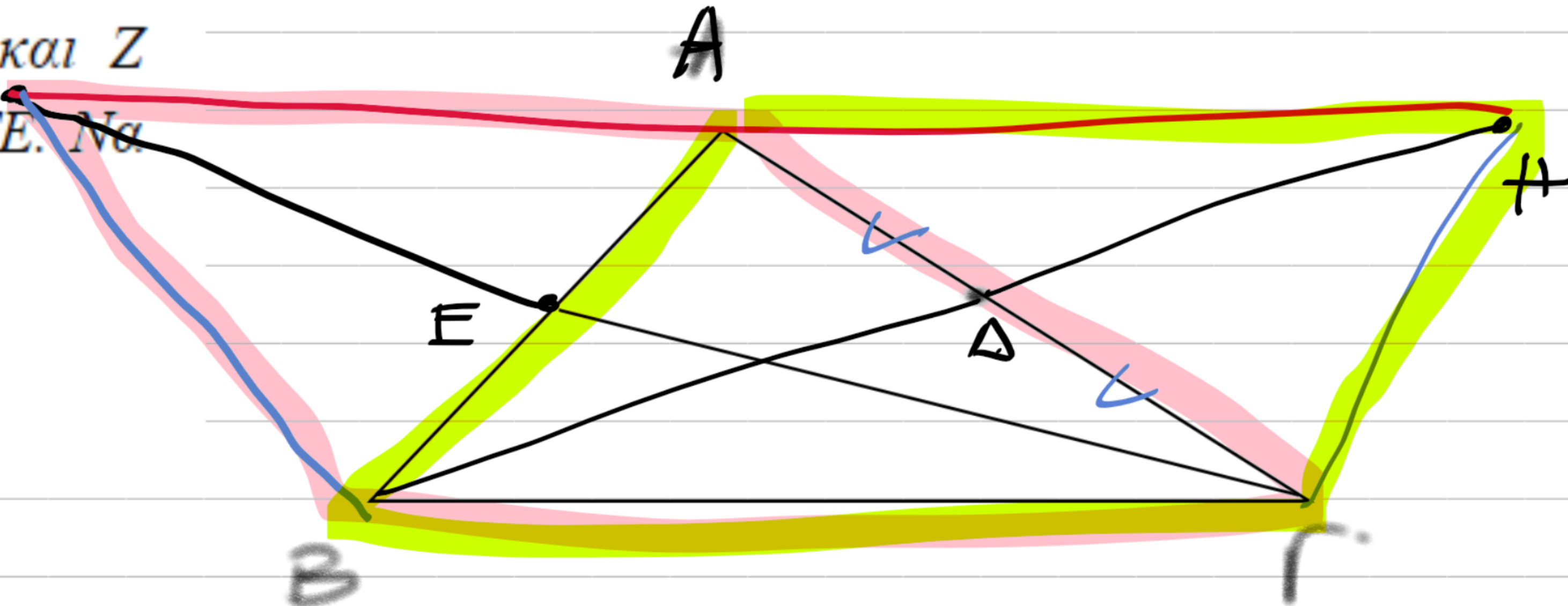
$$\begin{aligned} 90^\circ + \hat{N}_3 &= 180^\circ \Leftrightarrow \\ \hat{N}_3 &= 90^\circ \end{aligned}$$

6εξ105 / Αποδεικτικές / 4

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις προεκτάσεις των διαμέσων $B\Delta$ και ΓE παίρνουμε σημεία H και Z αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\Delta H = B\Delta$ και $ZE = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι

i) $AH = AZ$,

ii) τα σημεία Z , A και H είναι συνευθειακά.



$$\begin{aligned} AD &= \Delta \Gamma \\ BE &= AE \\ BD &= \Delta H \\ ZE &= E \Gamma \end{aligned}$$

νδβ

$$AZ = AH$$

• το $AH\Gamma B \neq$ γιατί οι διαγώνιες διχοτομούνται

• το $AZB\Gamma \neq$ γιατί οι διαγώνιες διχοτομούνται

Αρα

$$AH \parallel B\Gamma \text{ και } AZ \parallel B\Gamma$$

$$\text{οπότε } AH \parallel AZ$$

επίσης: $AZ \parallel AH$ με A κοινό άρα. A, Z, H συνευθειακά

Συνόψις. 16εξ. 105

3. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την AB κατά τμήμα $BE = B\Gamma$ και την $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta Z = \Delta \Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Z , Γ και E είναι συνευθειακά.

Θέσω νδβ Z, Γ, E συνευθειακά

$$\text{Άρκει νδβ. } \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 = 180^\circ \quad (1)$$

Τα τρίγωνα $Z\Delta\Gamma$ και $\Gamma B E$ ισοσκελή

$$\text{αρα. } \hat{\Gamma}_3 = \hat{Z} \text{ και } \hat{\Gamma}_1 = \hat{E}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_1 &= \hat{Z} + \hat{\Gamma}_3 \Rightarrow \hat{\Delta}_1 = 2\hat{\Gamma}_3 \Rightarrow \hat{\Gamma}_3 = \frac{\hat{\Delta}_1}{2} \\ \hat{B}_1 &= \hat{\Gamma}_1 + \hat{E} \Rightarrow \hat{B}_1 = 2\hat{\Gamma}_1 \Rightarrow \hat{\Gamma}_1 = \frac{\hat{B}_1}{2} \end{aligned}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\hat{\Gamma}_1}{2} + \hat{\Gamma}_2 + \frac{\hat{\Delta}_1}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ$$

αρα $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 = 180^\circ$
οπότε Z, Γ, E συνευθειακά

