



ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΖΩΗ ΛΥΚΕΙΟ

ΤΑΞΗ: Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Αργυρούπολη, 10/2/2023

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: _____

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Για να λύσουμε μία εξίσωση 1ου βαθμού εργαζόμαστε με τη σειρά:

- 1) Απαλείφουμε τους παρονομαστές, πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών. (Δεν κάνουμε πολλαπλασιασμούς αλλά απλοποιήσεις!)
- 2) Απαλείφουμε τις παρενθέσεις.
- 3) Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους.
- 4) Κάνουμε τις αναγωγές όμοιων όρων.
- 5) Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\begin{aligned}\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} &= 2 + \frac{3x-1}{15} \\ 15 \cdot \frac{x+4}{3} - 15 \cdot \frac{x-4}{5} &= 15 \cdot 2 + 15 \cdot \frac{3x-1}{15} \\ 5(x+4) - 3(x-4) &= 30 + (3x-1) \\ 5x+20-3x+12 &= 30+3x-1 \\ 5x-3x-3x &= 30-1-20-12 \\ -1x &= -3 \text{ άρα } x=3.\end{aligned}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση $(x+1)^2 + (x-2)^2 = 2(x-3)^2$.

Αναπτύσσουμε τις ταυτότητες: $x^2+2x+1+x^2-4x+4=2(x^2-6x+9)$

$$x^2+2x+1+x^2-4x+4=2x^2-12x+18$$

Όταν η εξίσωση είναι ανωτέρου βαθμού μεταφέρουμε **ΟΛΟΥΣ ΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ** στο α' μέλος.

$$x^2+2x+1+x^2-4x+4-2x^2+12x-18=0$$

$$10x=13 \text{ άρα } x=\frac{13}{10}$$

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$.

Πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του 0. Άρα $x \neq 1$.

$$(\cancel{x-1}) \frac{x^2}{\cancel{x-1}} - 1(x-1) = (\cancel{x-1}) \frac{1}{\cancel{x-1}} \quad \text{ή}$$

$$x^2 - x + 1 = 1 \quad \text{ή}$$

$$x^2 - x = 0 \quad \text{ή}$$

$$x(x-1)=0 \text{ δηλαδή } \mathbf{x=0} \text{ ή } \mathbf{x=1} \text{ (που απορρίπτεται)}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Στηρίζονται στην ιδιότητα: Αν $|x|=|a|$ τότε $x=a$ ή $x=-a$.

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=|x+3|$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω γίνεται: $2x-1=x+3$ ή $2x-1=-x-3$

$$\mathbf{x=4} \text{ ή } \mathbf{x=-\frac{2}{3}}.$$

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση $|3|x|+1|=7$.

Πρέπει $3|x|+1=7$ ή $3|x|+1=-7$

$$|x|=2 \quad \text{ή} \quad 3|x|=-8.$$

$$\mathbf{x=2} \text{ ή } \mathbf{x=-2} \text{ ή } \mathbf{\text{αδύνατη}}.$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος και κάνουμε παραγοντοποίηση.

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση $x^3-2x^2-x+2=0$

$$(x-2)(x^2-1)=0$$

$$(x-2)(x-1)(x+1)=0$$

$$\text{άρα } \mathbf{x=2} \text{ ή } \mathbf{x=1} \text{ ή } \mathbf{x=-1}.$$

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση $x^2(x-4)+2x(x-4)+(x-4)=0$.

Μια καλή ερώτηση είναι να βγάλουμε κοινό παράγοντα το $x-4$ και να το διαγράψουμε.

Η εξίσωση τότε γίνεται $x^2+2x+1=0$ και $\mathbf{x=-1}$ (διπλή ρίζα)

Λάθος! Δεν διαγράφουμε ποτέ με τον άγνωστο. Χάνουμε ρίζες.

Με παραγοντοποίηση γίνεται

$$(x-4)(x^2+2x+1)=0 \rightarrow \mathbf{x=4} \text{ ή } \mathbf{x=-1} \text{ (διπλή ρίζα)}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Πρέπει να έχουν τη μορφή $ax^2+bx+c=0$. (Με τη σειρά που δίνονται).

Λύνονται με τον τύπο όπου $\Delta=b^2-4ac$.

Διερεύνηση της εξίσωσης $ax^2+bx+c=0$.

$\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες
$\Delta = 0$	Έχει δύο ρίζες ίσες (ή μία διπλή)
$\Delta < 0$	Δεν έχει ρίζες

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση $x^2+(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$.

$$\begin{aligned}\text{Έχουμε: } \Delta &= (\sqrt{3}+1)^2 - 4\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3} = \\ &= 3 - 2\sqrt{3} + 1 = \quad (\text{αν γράψετε } 4 - 2\sqrt{3} \dots \text{χάσατε!!}) \\ &= (\sqrt{3}-1)^2. \\ \text{Άρα } x_{1,2} &= \frac{-(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2} = \frac{-(\sqrt{3}+1) \pm (\sqrt{3}-1)}{2} = \begin{cases} -\sqrt{3} \\ -1 \end{cases}.\end{aligned}$$

ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση $x^2+|x|-6=0$.

1ος τρόπος. Επειδή $x^2=|x|^2$ η εξίσωση γίνεται: $|x|^2+|x|-6=0$.

Αν θέσουμε $|x|=\omega$ προκύπτει η εξίσωση $\omega^2+\omega-6=0$ με ρίζες $\omega=2$ ή $\omega=-3$
δηλαδή $|x|=2$ άρα **$x=2$** ή **$x=-2$** και $|x|=-3$ (**αδύνατη**).

2ος τρόπος. Αν $x>0$ τότε $|x|=x$ και η εξίσωση γίνεται $x^2+x-6=0$ η οποία έχει ρίζες **$x=2$** ή $x=-3$.
(Η $x=-3$ απορρίπτεται ως αρνητική).

Αν $x<0$ τότε $|x|=-x$ και η εξίσωση γίνεται $x^2-x-6=0$ η οποία έχει ρίζες **$x=-2$** ή $x=3$
(Η $x=3$ απορρίπτεται ως θετική).

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση $x-2\sqrt{x}-8=0$

Θέτουμε $\sqrt{x}=\omega$ και η εξίσωση γίνεται: $\omega^2-2\omega-8=0$ που έχει ρίζες $\omega=4$ ή $\omega=-2$.

Άρα $\sqrt{x}=4$ οπότε **$x=16$** . Η εξίσωση $\sqrt{x}=-2$ είναι **αδύνατη**.

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση $(x^2+1)^2-6(x^2+1)+5=0$.

Αν κάνετε τις πράξεις μπορεί να...κολλήσετε.

Θέτουμε $x^2+1=\omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2-6\omega+5=0$ με ρίζες $\omega=1$ ή $\omega=5$
άρα $x^2+1=1$ ή $x^2+1=5$

$x=0$ (διπλή ρίζα) ή **$x=2$** ή **$x=-2$** .

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση $x^4+x^2-2=0$ (**Διτετράγωνη εξίσωση**)

Θέτουμε $x^2=\omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2+\omega-2=0$ με ρίζες $\omega=1$ ή $\omega=-2$.

Επομένως $x^2=1$ ή $x^2=-2$ (**αδύνατη**)

άρα **$x=1$** ή **$x=-1$** .

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

π.χ. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η εξίσωση $x^2 - 3\lambda x - (\lambda + 3) = 0$ να έχει ρίζα το -1 και στη συνέχεια να εξεταστεί αν η ρίζα αυτή είναι διπλή.

Αφού το $x = -1$ είναι ρίζα, θα την επαληθεύει πλήρως δηλαδή $(-1)^2 - 3\lambda(-1) - (\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow 1 + 3\lambda - \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

Άρα για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται: $x^2 - 3x - 4 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(-4) = 25 > 0$$

Επομένως υπάρχουν δύο άνισες πραγματικές ρίζες, με μια την $x = -1$.

2. Να βρεθεί για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + 4x + \lambda + 2 = 0$ έχει:

α) μία μόνο ρίζα, β) μια διπλή ρίζα, γ) καμία ρίζα.

α) Για να έχει μόνο μία ρίζα, αρκεί να είναι πρώτου βαθμού, δηλαδή ο συντελεστής του x^2 να είναι μηδέν. Οπότε $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

β) Για να έχει διπλή ρίζα αρκεί $\lambda \neq 2$ και $\Delta = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 16 - 4(\lambda^2 - 4) = 16 - 4\lambda^2 + 16 = -4\lambda^2 + 32$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow -4\lambda^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 8 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{2}$$

γ) Για να μην έχει καμία ρίζα, αρκεί $\lambda \neq 2$ και $\Delta < 0$.

$$\text{Άρα } -\lambda^2 + 8 < 0 \Rightarrow \lambda^2 > 8 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} > \sqrt{8} \Leftrightarrow |\lambda| > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \lambda > 2\sqrt{2} \text{ ή } \lambda < -2\sqrt{2}.$$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Α' ΒΑΘΜΟΥ

Λύνονται όπως οι εξισώσεις. Προσοχή όμως!

α) Όταν διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου και είναι αρνητικός αριθμός αλλάζει η φορά της ανίσωσης, δηλ. η ανίσωση $-2x > 6$ γίνεται $x < -3$.

β) Μία ανίσωση επαληθεύεται με πολλούς αριθμούς. Αφού δεν μπορούμε να τους γράψουμε όλους ...τους δείχνουμε. Γι' αυτό είναι **απαραίτητος ο άξονας**.

Αν $a > 0$ και $ax > b$ τότε $x > \frac{b}{a}$

Αν $a < 0$ και $ax > b$ τότε $x < \frac{b}{a}$

Αν $a = 0$ τότε έχουμε $0x > b$. Αν $0 > b$ είναι σωστό η ανίσωση αληθεύει για κάθε x .
Αν $0 > b$ είναι λάθος η ανίσωση είναι αδύνατη.

π.χ. Να λυθεί η ανίσωση: $2x < 8$ ή $\frac{2x}{2} < \frac{8}{2}$ ή

Άρα $x < 4$.



(Προσέξτε το "κουλουράκι; Αυτό σημαίνει ότι το 4 δεν ανήκει στις λύσεις της ανίσωσης)

π.χ. Να λυθεί η ανίσωση: $-2x \leq 8$ ή

$$\frac{-2x}{-2} \geq \frac{8}{-2} \quad \text{ή}$$

$$\text{Άρα } x \geq -4.$$



(Προσέξτε την κουκίδα; Αυτό σημαίνει ότι το -4 ανήκει στις λύσεις της ανίσωσης)

π.χ. Να βρείτε τους **ακέραιους** αριθμούς που επαληθεύουν τις ανισώσεις:

$$5x-5 > x-13 \quad \text{και} \quad 5x-3 \leq 2x+9. \quad \text{Οι λύσεις των ανισώσεων είναι:}$$

$$5x-x > 5-13 \quad \text{και} \quad 5x-2x \leq 3+9$$

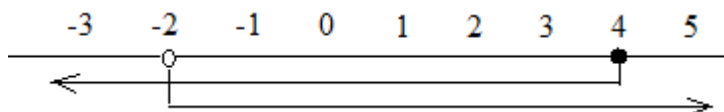
$$4x > -8 \quad \text{και} \quad 3x \leq 12$$

$$x > -2 \quad \text{και} \quad x \leq 4.$$

Φτιάχνουμε άξονα χωριστά για την καθεμία...



...και έναν άξονα για τις δύο μαζί. Αν έχετε άνεση φτιάξτε κατευθείαν τον τελικό άξονα.



Από τους αριθμούς που βρίσκονται στο διάστημα που βρήκαμε θα πάρουμε μόνο τους ακέραιους. Άρα η απάντηση είναι **-1, 0, 1, 2, 3, 4**.

π.χ. Να βρείτε τους **φυσικούς** αριθμούς που επαληθεύουν τις ανισώσεις:

$$5x-5 > x-17 \quad \text{και} \quad 5x-3 \leq 2x+9. \quad \text{Οι λύσεις των ανισώσεων είναι:}$$

$$5x-x > 5-17 \quad \text{και} \quad 5x-2x \leq 3+9$$

$$4x > -12 \quad \text{και} \quad 3x \leq 12$$

$$x > -3 \quad \text{και} \quad x \leq 4$$

Οι **φυσικοί** αριθμοί που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις είναι **0, 1, 2, 3, 4**.

π.χ. α) Να λυθεί η ανίσωση $-5 < 2x-3 \leq 7$, $x \in \mathbb{R}$.

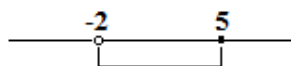
β) Ποιοι ακέραιοι αριθμοί την επαληθεύουν;

α) Μπορούμε να την σπάσουμε σε δύο ανισώσεις $-5 < 2x-3$ και $2x-3 \leq 7$ τις οποίες θα λύσουμε χωριστά ή να την λύσουμε "πακέτο", ως εξής:

$$-5+3 < 2x-3+3 \leq 7+3, \quad (\text{Προσθέσαμε και στα τρία μέλη το 3})$$

$$-2 < 2x \leq 10 \quad \text{ή} \quad (\text{Διαιρούμε και τα τρία μέλη με το 2})$$

$$\frac{-2}{2} < \frac{2x}{2} \leq \frac{10}{2} \quad \text{ή} \quad -2 < x \leq 5 \quad \text{ή} \quad x \in (-2, 5].$$



ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Αν $|x| < \rho$ τότε $-\rho < x < \rho, \rho > 0$

Αν $|x| > \rho$ τότε $x > \rho$ ή $x < -\rho, \rho > 0$.

Στη θέση του x μπορεί να είναι μία παράσταση του x .

π.χ. Να λύσετε την ανίσωση $|x-2| < 5$.

Η ανίσωση γράφεται:

$-5 < x-2 < 5$ προσθέτουμε το 2 και στα τρία μέλη:

$-3 < x < 7$

Απαραίτητος ο άξονας:

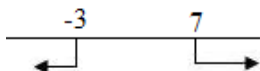


π.χ. Να λύσετε την ανίσωση $|x-2| > 5$.

Η ανίσωση γράφεται:

$x-2 > 5$ ή $x-2 < -5$

$x > 7$ ή $x < -3$.



π.χ. Να λύσετε την ανίσωση $|x-2| \geq 0$.

Ένα απόλυτο είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός (θετικός ή μηδέν). Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

π.χ. Να λύσετε την ανίσωση $|x-2| > 0$.

Επειδή το απόλυτο είναι θετικός αριθμός, η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \neq 2$, αφού για $x=2$ θα βρούμε $|2-2|=0$.

π.χ. Να λύσετε την ανίσωση $|x-2| < -3$.

Η ανίσωση δεν αληθεύει για κανέναν αριθμό, αφού το απόλυτο είναι θετικός αριθμός.

π.χ. Να λύσετε την ανίσωση $3 < |x-2| \leq 5$.

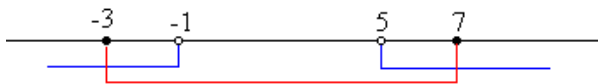
Υποχρεωτικά θα...σπάσουμε την ανίσωση σε δύο ανισώσεις.

$3 < |x-2|$ και $|x-2| \leq 5$ ή

$x-2 > 3$ ή $x-2 < -3$ και $-5 \leq x-2 \leq 5$.

$x > 5$ ή $x < -1$ και $-3 \leq x \leq 7$.

Άρα $x \in [-3, -1) \cup (5, 7]$.



π.χ. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x^2 - 4x + 4} \geq 5$.

Η ανίσωση γράφεται: $\sqrt{(x-2)^2} \geq 5$. (Γνωρίζουμε ότι $\sqrt{a^2} = |a|$), άρα

$|x-2| \geq 5$, άρα $x-2 \geq 5$ ή $x-2 \leq -5$ και τελικά $x \geq 7$ ή $x \leq -3$.

Επομένως $x \in (-\infty, -3] \cup [7, +\infty)$.

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Να λυθούν για τις διάφορες τιμές του πραγματικού λ οι ακόλουθες παραμετρικές εξισώσεις:

α) $(\lambda - 1)(\lambda + 3)x = \lambda + 3.$

β) $\lambda^2 x - \lambda^2 - \lambda + 5 = 25(x - \lambda + 4).$

α) $(\lambda - 1)(\lambda + 3)x = \lambda + 3$

- Αν $(\lambda - 1)(\lambda + 3) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -3$ έχει μοναδική λύση τη

$$x = \frac{\cancel{\lambda + 3}}{(\lambda - 1)\cancel{(\lambda + 3)}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda - 1}.$$

- Αν $\lambda = 1$ γίνεται $0x = 4$, που είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda = -3$ γίνεται $0x = 0$, που είναι αόριστη.

β) $\lambda^2 x - \lambda^2 - \lambda + 5 = 25(x - \lambda + 4) \Leftrightarrow$

$$\lambda^2 x - \lambda^2 - \lambda + 5 = 25x - 25\lambda + 100 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 x - 25x = \lambda^2 - 24\lambda + 95 \Leftrightarrow \Delta = 196 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 14$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{24 \pm 14}{2} \nearrow 19 \searrow 5$$

$$(\lambda - 5)(\lambda + 5)x = (\lambda - 19)(\lambda - 5)$$

- Αν $(\lambda - 5)(\lambda + 5) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 5$ και $\lambda \neq -5$ έχει μοναδική λύση την $x = \frac{\lambda - 19}{\lambda + 5}.$
- Αν $\lambda = 5$ γίνεται $0x = 0$, που είναι αόριστη.
- Αν $\lambda = -5$ γίνεται $0x = 240$, που είναι αδύνατη.