



ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΖΩΗ

ΤΑΞΗ: Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Αργυρούπολη, 21/12/2022

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: _____

Διάταξη πραγματικών αριθμών

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $4κ^2 + 1 \geq 4κ$.

β) $κ^2 + λ^2 \geq 4(κ + λ) - 8$.

Λύση

α) $4κ^2 + 1 \geq 4κ \Leftrightarrow 4κ^2 - 4κ + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2κ)^2 - 2 \cdot 2κ \cdot 1 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2κ - 1)^2 \geq 0$,

που ισχύει οπότε ισχύει και η αρχική.

β) $κ^2 + λ^2 \geq 4(κ + λ) - 8 \Leftrightarrow κ^2 + λ^2 \geq 4κ + 4λ - 8 \Leftrightarrow κ^2 - 4κ + λ^2 - 4λ + 8 \geq 0 \Leftrightarrow$

$κ^2 - 4κ + 4 + λ^2 - 4λ + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (κ - 2)^2 + (λ - 2)^2 \geq 0$, η οποία ισχύει αφού $(κ - 2)^2 \geq 0$

και $(λ - 2)^2 \geq 0$ άρα ισχύει και η αρχική.

2. Αν $κ, λ$ θετικοί αριθμοί να δείξετε ότι: $(κ - λ) \left(\frac{1}{λ} - \frac{1}{κ} \right) > -4$.

Λύση

$(κ - λ) \left(\frac{κ - λ}{κλ} \right) > -4 \Leftrightarrow \frac{(κ - λ)^2}{κλ} + 4 > 0 \stackrel{κ-λ>0}{\Leftrightarrow} \cancel{κλ} \frac{(κ - λ)^2}{\cancel{κλ}} + 4κλ > 0 \Leftrightarrow$

$κ^2 - 2κλ + λ^2 + 4κλ > 0 \Leftrightarrow κ^2 + 2κλ + λ^2 > 0 \Leftrightarrow (κ + λ)^2 > 0$, ισχύει.

3. Αν $α > 1$ ναδειχθεί ότι $α^2 - α + 1 < α^3$.

Λύση

$α^2 - α + 1 < α^3 \Leftrightarrow α^2 - α + 1 - α^3 < 0 \Leftrightarrow α^2(1 - α) + 1 - α < 0 \Leftrightarrow (1 - α)(α^2 + 1) < 0$ που

ισχύει αφού $α > 1 \Rightarrow 1 - α < 0$ και $α^2 + 1 > 0$ (άθροισμα 2 θετικών).

4. Αν $\kappa < \lambda$ και $a > 0$ να δείξετε ότι: $\kappa < \frac{\kappa + a\lambda}{a+1} < \lambda$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $\kappa < \frac{\kappa + a\lambda}{a+1}$ και $\frac{\kappa + a\lambda}{a+1} < \lambda \Leftrightarrow$

$$\kappa - \frac{\kappa + a\lambda}{a+1} < 0 \text{ και } \frac{\kappa + a\lambda}{a+1} - \lambda < 0 \stackrel{a+1>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\kappa(a+1) - (\kappa + a\lambda) < 0 \text{ και } \kappa + a\lambda - \lambda(a+1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\kappa a + \kappa - \kappa - a\lambda < 0 \text{ και } \kappa + a\lambda - a\lambda - \lambda < 0 \Leftrightarrow$$

$$a(\kappa - \lambda) < 0 \text{ και } \kappa - \lambda < 0$$

Που ισχύει αφού $\kappa < \lambda \Leftrightarrow \kappa - \lambda < 0$ άρα ισχύει και η αρχική.

5. Να συγκρίνεται τους αριθμούς $2(4\kappa^2 + 9\lambda^2)$ και $(2\kappa + 3\lambda)^2$.

Λύση

$$2(4\kappa^2 + 9\lambda^2) - (2\kappa + 3\lambda)^2 = 8\kappa^2 + 18\lambda^2 - 4\kappa^2 - 9\lambda^2 - 12\kappa\lambda = 4\kappa^2 - 12\kappa\lambda + 9\lambda^2 = (2\kappa - 3\lambda)^2 \geq 0$$

$$\text{Άρα } 2(4\kappa^2 + 9\lambda^2) \geq (2\kappa + 3\lambda)^2$$

6. Αν $-2 < x < 4$ και $-3 < y < 2$ να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται η παράσταση $2x - 3y$.

Λύση

$$-2 < x < 4 \stackrel{\cdot 2}{\Leftrightarrow} -4 < 2x < 8 \quad (1)$$

$$-3 < y < 2 \stackrel{\cdot (-3)}{\Leftrightarrow} 9 > -3y > -6 \Leftrightarrow -6 < -3y < 9 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow -4 + (-6) < 2x + (-3y) < 8 + 9 \Leftrightarrow -10 < 2x - 3y < 17.$$

7. Αν $3 < x < 12$ και $1 < y < 4$ να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις
α) $x \cdot y$, β) $\frac{x}{y}$.

Λύση

$$\text{α) } 3 < x < 12 \text{ και } 1 < y < 4.$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ομόστροφες ανισότητες θετικών όρων και προκύπτει $3 < x \cdot y < 48$.

β) $1 < y < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{y} < 1$ και πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με την $3 < x < 12$ οπότε έχουμε

$$\frac{3}{4} < \frac{x}{y} < 12.$$

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

(να γνωρίζετε από θεωρία τον ορισμό της απόλυτης τιμής(σελ62) και τις παρακάτω αποδείξεις)

Ορισμός

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

Ιδιότητες απολύτων

- $|a| \geq 0$
- $|a| \geq a$ και $|a| \geq -a$
- $|a|^2 = a^2$
- Αν $\theta > 0$ τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a$ ή $x = -a$
- Αν $\theta > 0$ τότε: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$
- Αν $\theta > 0$ τότε: $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$
- Έστω $a, \beta \in \mathbb{R}$ τότε:
 - α. $|a\beta| = |a||\beta| \rightarrow |a_1 a_2 \dots a_n| = |a_1| |a_2| \dots |a_n|$
 - β. $\left| \frac{a}{\beta} \right| = \frac{|a|}{|\beta|}, \beta \neq 0$
 - γ. $|a + \beta| \leq |a| + |\beta| \rightarrow |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$

Αποδείξεις

α. $|a\beta| = |a||\beta| \Leftrightarrow |a\beta|^2 = (|a||\beta|)^2 \Leftrightarrow |a\beta|^2 = |a|^2 |\beta|^2 \Leftrightarrow (a\beta)^2 = a^2 \beta^2$
που ισχύει.

β. $\left| \frac{a}{\beta} \right| = \frac{|a|}{|\beta|} \Leftrightarrow \left| \frac{a}{\beta} \right|^2 = \left(\frac{|a|}{|\beta|} \right)^2 \Leftrightarrow \left| \frac{a}{\beta} \right|^2 = \frac{|a|^2}{|\beta|^2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{\beta} \right)^2 = \frac{a^2}{\beta^2}$ που ισχύει.

γ. $|a + \beta| \leq |a| + |\beta| \Leftrightarrow |a + \beta|^2 \leq (|a| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow$

$$|a + \beta|^2 \leq |a|^2 + 2|a||\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow (a + \beta)^2 \leq a^2 + 2|a||\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + 2a\beta + \beta^2 \leq a^2 + 2|a||\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow 2a\beta \leq 2|a||\beta| \Leftrightarrow$$

$$a\beta \leq |a\beta| \text{ που ισχύει.}$$

1. Να λυθεί η εξίσωση: $|5x - 3| = 7$.

Λύση

$$|5x - 3| = 7 \Leftrightarrow 5x - 3 = 7 \text{ ή } 5x - 3 = -7 \Leftrightarrow$$

$$5x = 10 \text{ ή } 5x = -4 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \text{ ή } x = -\frac{4}{5}.$$

2. Να λυθεί η ανίσωση: $|3x + 2| > 4$.

Λύση

$$|3x + 2| > 4 \Leftrightarrow 3x + 2 < -4 \text{ ή } 3x + 2 > 4 \Leftrightarrow$$

$$3x < -6 \text{ ή } 3x > 2 \Leftrightarrow$$

$$x < -2 \text{ ή } x > \frac{2}{3}.$$

3. Να λυθούν οι ανισώσεις: i) $|5x + 10| < -5$ ii) $|13x - 2| > -1$.

Λύση

i) Αφού $-5 < 0$ τότε η ανίσωση είναι αδύνατη.

ii) Αφού $-1 < 0$ τότε αληθεύει για κάθε x άρα είναι αόριστη.

4. Να λυθεί η ανίσωση: $2 \cdot |4 - 2x| \leq 12$.

Λύση

$$\frac{2 \cdot |4 - 2x|}{2} \leq \frac{12}{2} \Leftrightarrow |4 - 2x| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq 4 - 2x \leq 6 \Leftrightarrow -6 - 4 \leq -2x \leq 6 - 4 \Leftrightarrow$$

$$-10 \leq -2x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{-10}{-2} \geq \frac{-2x}{-2} \geq \frac{2}{-2} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5.$$

5. Να λυθεί η εξίσωση: $|3x + 4| = |7 - 2x|$.

Λύση

$$|3x + 4| = |7 - 2x| \Leftrightarrow 3x + 4 = 7 - 2x \text{ ή } 3x + 4 = -(7 - 2x) \Leftrightarrow$$

$$5x = 3 \text{ ή } 3x + 4 = -7 + 2x \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{3}{5} \quad \text{ή} \quad x = -11$$

6. Να λυθεί η εξίσωση: $|x^2 + 4x| + |x^2 - 16| = 0$ αφού πρώτα αποδειχθεί ότι αν $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Λύση

Επειδή $|x| \geq 0$ και $|y| \geq 0$ η ισότητα $|x| + |y| = 0$ θα ισχύει μόνο όταν $|x| = |y| = 0$ δηλαδή όταν $x = y = 0$.

Αντιστρόφως: Αν $x = y = 0$ προφανώς $|x| = |y| = 0 + 0 = 0$.

$$\text{Άρα } |x^2 + 4x| + |x^2 - 16| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x = 0 \\ x^2 - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+4) = 0 \\ (x-4)(x+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \text{ή} \quad x + 4 = 0 \\ x - 4 = 0 \quad \text{ή} \quad x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -4 \\ x = 4 \quad \text{ή} \quad x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \{x = -4 \text{ (κοινή λύση)}\}.$$

7. Να λυθεί η ανίσωση: $||x + 2| - 3| < 1$.

Λύση

$$||x + 2| - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < |x + 2| - 3 < 1 \Leftrightarrow -1 + 3 < |x + 2| < 1 + 3 \Leftrightarrow$$

$$2 < |x + 2| < 4 \Leftrightarrow |x + 2| > 2 \text{ (1) και } |x + 2| < 4 \text{ (2)}$$

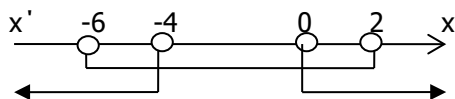
Επιλύουμε τις ανισώσεις (1) και (2) και στην συνέχεια βρίσκουμε τις κοινές λύσεις:

$$(1) \Rightarrow |x + 2| > 2 \Leftrightarrow x + 2 < -2 \quad \text{ή} \quad x + 2 > 2 \Leftrightarrow$$

$$x < -4 \quad \text{ή} \quad x > 0.$$

$$(2) \Rightarrow |x + 2| < 4 \Leftrightarrow -4 < x + 2 < 4 \Leftrightarrow -4 - 2 < x < 4 - 2 \Leftrightarrow -6 < x < 2.$$

Βρίσκω τις κοινές λύσεις:



Επομένως η αρχική αληθεύει όταν: $-6 < x < -4$ ή $0 < x < 2$

ή αλλιώς: $x \in (-6, -4) \cup (0, 2)$.

8. Να λυθεί η εξίσωση: $|3 - x| - \frac{|6 - 2x|}{3} = \frac{7}{2} + \frac{|x - 3|}{4}$.

Λύση

$$|3-x| - \frac{|6-2x|}{3} = \frac{7}{2} + \frac{|x-3|}{4} \Leftrightarrow |3-x| - \frac{|2(3-x)|}{3} = \frac{7}{2} + \frac{|x-3|}{4} \Leftrightarrow$$
$$|3-x| - \frac{2 \cdot |3-x|}{3} = \frac{7}{2} + \frac{|3-x|}{4}$$

Θέτω $\omega = |3-x|$ οπότε:

$$\omega - \frac{2}{3}\omega = \frac{7}{2} + \frac{1}{4}\omega \stackrel{\text{ΕΚΠ}=12}{\Leftrightarrow} 12\omega - 12 \cdot \frac{2}{3}\omega = 12 \cdot \frac{7}{2} + 12 \cdot \frac{1}{4}\omega \Leftrightarrow 12\omega - 8\omega = 42 + 3\omega \Leftrightarrow$$

$$\omega = 42 \Leftrightarrow |3-x| = 42 \Leftrightarrow 3-x = 42 \quad \text{ή} \quad 3-x = -42 \Leftrightarrow$$

$$x = -39 \quad \text{ή} \quad x = 45$$

9. Ναλυθεί η ανίσωση: $\frac{|x-2|-3}{3} - \frac{|x-2|}{6} < 2 - \frac{|2-x|}{3}.$

Λύση

Αφού $|x-2| = |2-x|$ έχω: $\frac{|x-2|-3}{3} - \frac{|x-2|}{6} < 2 - \frac{|x-2|}{3}.$

Θέτω $\omega = |x-2|$ άρα:

$$\frac{\omega-3}{3} - \frac{\omega}{6} < 2 - \frac{\omega}{3} \Leftrightarrow 2(\omega-3) - \omega < 12 - 2\omega \Leftrightarrow 2\omega - 6 - \omega < 12 - 2\omega \Leftrightarrow$$

$$3\omega < 18 \Leftrightarrow \omega < 6$$

$$\text{Οπότε } |x-2| < 6 \Leftrightarrow -6 < x-2 < 6 \Leftrightarrow -4 < x < 8.$$

10. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A = \frac{x^2 - 9|x|}{|x| - 9}.$

Λύση

Για να ορίζεται η παράσταση A πρέπει $|x| - 9 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 9 \Leftrightarrow x \neq 9$ και $x \neq -9.$

Επειδή $x^2 = |x|^2$ έχουμε:

$$A = \frac{|x|^2 - 9|x|}{|x| - 9} = \frac{|x|(|x| - 9)}{|x| - 9} = |x|$$

$$\text{Άρα } A = \begin{cases} -x, & x < 0 \quad \text{και} \quad x \neq -9 \\ x, & x \geq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 9 \end{cases}$$

11. Αν $|x| \leq 3$ και $|y| \leq 2$ να δείξετε ότι $|4x - 5y| \leq 22$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $-22 \leq 4x - 5y \leq 22$.

Είναι $|x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow -12 \leq 4x \leq 12$.

$|y| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow 10 \geq -5y \geq -10 \Leftrightarrow -10 \leq -5y \leq 10$.

Προσθέτω κατά μέλη τις ανισώσεις και έχω:

$$-12 - 10 \leq 4x - 5y \leq 12 + 10 \Leftrightarrow -22 \leq 4x - 5y \leq 22.$$

12. α) Να γράψετε την ανίσωση $-3 < x < 9$ ως $d(x, a) < \beta$.

β) Να γράψετε την ανίσωση $(x \leq -4 \text{ ή } x \geq 18)$ ως $d(x, a) \geq \beta$.

Λύση

α) $d(x, a) < \beta \Leftrightarrow |x - a| < \beta$

Αναζητούμε αριθμό a που να είναι το ημίαθροισμα των άκρων της ανίσωσης

$$a = \frac{(-3 + 9)}{2} = 3 \text{ οπότε}$$

$$-3 < x < 9 \Leftrightarrow -3 - 3 < x - 3 < 9 - 3 \Leftrightarrow -6 < x - 3 < 6 \Leftrightarrow d(x, 3) = 6.$$

β) $d(x, a) \geq \beta \Leftrightarrow |x - a| \geq \beta$

Ομοίως αναζητούμε το ημίαθροισμα οπότε $a = \frac{(-4 + 18)}{2} \Rightarrow a = 7$

$$\text{Άρα } x \leq -4 \text{ ή } x \geq 18 \Leftrightarrow x - 7 \leq -11 \text{ ή } x - 7 \geq 11 \Leftrightarrow |x - 7| \geq 11 \Leftrightarrow$$

$$d(x, 7) \geq 11.$$

Ρίζες πραγματικών αριθμών (να γνωρίζετε από θεωρία τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας (σελ69))

Ιδιότητες

Για τις τετραγωνικές ρίζες ισχύουν τα εξής

- $\sqrt{a^2} = |a|, a \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{a^2} = a, \text{ αν } a \geq 0$
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{a\beta}, a, \beta \geq 0$
- $\sqrt{\frac{a}{\beta}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}}, a \geq 0 \text{ και } \beta > 0$

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων.

α) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{5} + 7\sqrt{3} - 9\sqrt{5}$,

β) $\sqrt{16x} + \sqrt{121x} - \sqrt{1024x}$.

Λύση

α) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{5} + 7\sqrt{3} - 9\sqrt{5} = 9\sqrt{3} - 4\sqrt{5}$.

β) Για $x \geq 0$ είναι: $\sqrt{16x} + \sqrt{121x} - \sqrt{1024x} =$

$$\sqrt{16} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{121} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1024} \cdot \sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 11\sqrt{x} - 32\sqrt{x} = -17\sqrt{x}.$$

2. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις.

α) $A = \sqrt{x^2 + 2}$, β) $B = \sqrt{x - 2}$, γ) $\Gamma = \sqrt[3]{8 - |x|}$,

δ) $\Delta = \sqrt{-(x - 4)^2}$.

Λύση

α) Ορίζεται όταν $x^2 + 2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Ορίζεται όταν $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ ή $x \in [2, +\infty)$.

γ) Ορίζεται όταν $8 - |x| \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 8 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 8$.

δ) Ορίζεται όταν $-(x - 4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 4$.

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

α) $\sqrt{25x^2}$

β) $(\sqrt{2x - 1} + \sqrt{3 + x}) \cdot (\sqrt{2x - 1} - \sqrt{3 + x})$

γ) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{7}} \cdot \sqrt{7 + \sqrt{7}}$

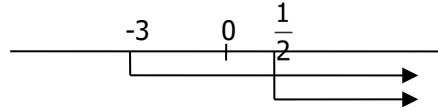
δ) $\frac{\sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{108}}{\sqrt{20} + \sqrt{48} + \sqrt{72}}$

Λύση

α) $\sqrt{25x^2} = \sqrt{(5x)^2} = |5x| = \begin{cases} 5x, & x \geq 0 \\ -5x, & x < 0 \end{cases}$

β) Ορίζεται όταν $2x - 1 \geq 0$ και $3 + x \geq 0 \Rightarrow$

$$x \geq \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad x \geq -3$$



Άρα ορίζεται όταν $x \geq \frac{1}{2}$, οπότε

$$(\sqrt{2x-1} + \sqrt{3+x}) \cdot (\sqrt{2x-1} - \sqrt{3+x}) \stackrel{\text{διαφορά τετραγώνων}}{=} (\sqrt{2x-1})^2 - (\sqrt{3+x})^2 = 2x-1 - (3+x) = x-4$$

$$\gamma) \sqrt{7} \cdot \sqrt{7-\sqrt{7}} \cdot \sqrt{7+\sqrt{7}} = \sqrt{7(7-\sqrt{7})(7+\sqrt{7})} = \sqrt{7(7^2 - \sqrt{7}^2)} = \sqrt{7(49-7)} =$$

$$\sqrt{7 \cdot 42} = \sqrt{7 \cdot 7 \cdot 6} = 7\sqrt{6}$$

$$\delta) \frac{\sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{108}}{\sqrt{20} + \sqrt{48} + \sqrt{72}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 9} + 3\sqrt{2 \cdot 9} + \sqrt{36 \cdot 3}}{\sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{16 \cdot 3} + \sqrt{36 \cdot 2}} = \frac{3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3}}{2\sqrt{5} + 4\sqrt{3} + 6\sqrt{2}} =$$

$$\frac{3(\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})}{2(\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})} = \frac{3}{2}$$

4. Να συγκρίνεται τους αριθμούς: $\sqrt{8}$ και $\sqrt{5} + \sqrt{3}$.

Λύση

$$\text{Έστω } \sqrt{8} > \sqrt{5} + \sqrt{3} \Leftrightarrow (\sqrt{8})^2 > (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 8 > \sqrt{5}^2 + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 \Leftrightarrow$$

$$8 > 5 + 2\sqrt{15} + 3 \Leftrightarrow 8 > 8 + 2\sqrt{15} \Leftrightarrow 2\sqrt{15} < 0, \text{ άτοπο}$$

$$\text{Άρα } \sqrt{8} < \sqrt{5} + \sqrt{3}.$$

...ΕΝΝΟΕΙΤΑΙ ΟΤΙ ΣΤΗΝ ΥΛΗ ΣΑΣ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΤΑΙ ΚΑΙ Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΔΙΟΥ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ....ΚΑΙ ΚΑΛΑ ΧΡΙΣΤΟΥΓΕΝΝΑ, ΜΕ ΥΓΕΙΑ.

